Univ.-Prof. Dr. Hans Czap

FB IV - Wirtschaftsinformatik

Universität Trier

Skript zur SWI-Vorlesung

Quantitative Methoden in der Wirtschaftsinformatik

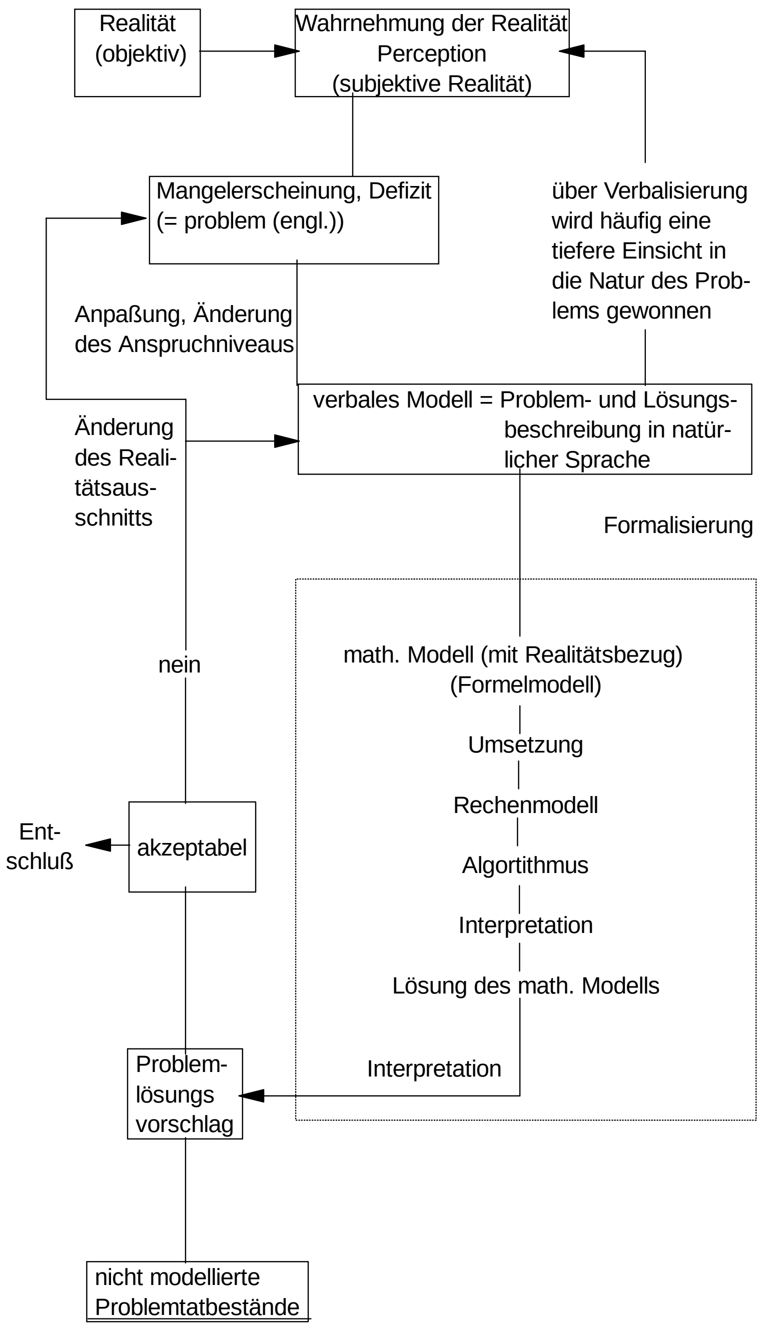
Die Vorlesung ist Bestandteil der Speziellen Wirtschaftsinformatik „Entscheidungsunterstützende System bzw. des entprechenden Wahlpflichtfaches.

Stand: SS 03

1. Gegenstand der Vorlesung

1.1 Modellgestützte Entscheidungsfindung

Der Gegenstand der Veranstaltung ist der gestrichelt eingerahmte Ablauf. Wesentlich ist die Umsetzung des verbalen Modells in das Formalmodell; dies ist zur Zeit die Aufgabe eines Modellentwicklers (Systemanalytikers). In Zukunft werden hier durch EDV-Einsatz Unterstützungen geboten, z.B. KI-Methoden und vielfältige, grafische Darstellungen.



Ein Modell ist eine vereinfachte Abbildung realer Tatbestände mit Strukturgleichheit bzw. -ähnlichkeit (Homomorphie) zwischen Realsystem und Modell. Ein Modell im Sinne der Entscheidungstheorie ist eine zweckorientierte relationseindeutige Abbildung der Realität. Hier wird die Definition eingegrenzt, indem zweckorientiert im Sinne von defizitbeseitigend (= Problemlösung) verstanden wird.

1.2 Beispiele quantitativer Entscheidungsprobleme

1.2.1 Standortwahl

Unternehmen U hat mit seinen Abnehmern $A_1,..,A_n$ langfristige feste Liefervereinbarungen über die Produktmengen $m_1,..,m_n$ getroffen. Es überlegt, wie der Unternehmensstandort S positioniert werden soll, damit die resultierenden Transportkosten minimal werden.
Unterstellt man, dass die Transportkosten ausschließlich von der Entfernung abhängen und proportional zur Entfernung sind, dann erhält man eine nichtlineare Zielfunktion (Steiner-Weber-Modell):

A_i habe die Koordinaten (x_i, y_i), S die Koordinaten (x,y),
k = Preis, um eine Mengeneinheit des betrachteten Gutes einen km zu transportieren,

$$z = k * \sum_{j=1}^{n} m_j * \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} \Rightarrow \min$$

Zur Lösung muss z minimiert werden.

Das vorliegende Problem ist ein Beispiel einer Entscheidung unter ausschließlicher Berücksichtigung einer einzigen Zielsetzung, hier der Minimierung der Transportkosten eines einzigen Gutes. In der Realität werden weitere Einflußfaktoren eine häufig nicht vernachlässigbare Bedeutung haben, beispielsweise:

- Berücksichtigung mehrerer Produkte mit unterschiedlichen Transportkosten (Simultane Minimierung mehrerer nichtlinearer Funktionen)
- Transportkosten sind in der Regel nicht proportional zur Menge der zu transportierenden Güter. Sie haben vielmehr bezüglich der Transportmenge sprungfixen Charakter. (Derartige Sprünge lassen sich mit Hilfe von zusätzlichen 0-1-Variablen formal abbilden. Die Lösbarkeit von 0-1-Problemen ist in der Praxis häufig nur approximativ möglich.)
- Neben den Transportkosten sind andere Kosten/Einflußfaktoren relevant, z.B. die Gewerbesteuer. (Die Gewerbesteuer ist eine kommunale Steuer und damit von Standort zu Standort unterschiedlich.).

1.2.2 Rundreiseproblem

Ein Vertreter plant den Besuch von n verschiedenen Städten, $S_1,..,S_n$, um dort Kundengespräche zu führen. Die Tour hätte er gerne so ausgeführt, dass die resultierenden Fahrtzeiten minimal werden.

Varianten dieses Problems

Chinese postman problem: Der Postbote plant seine alltägliche Rund-Tour durch die Straßen zur Auslieferung der Post so, dass er nur die Straßen/Adressen aufsucht, für die er eine Lieferung hat, möglichst keine Straße zweimal durchlaufen muss und am Ende seine Post vollständig abgeliefert hat.

Zuordnungsproblem: Gegeben seien n Mitarbeiter M_i mit den individuellen Fähigkeiten $F_1,..,F_n$. sowie n Arbeitsplätze $A_1,..,A_n$ mit spezifischen Qualifikationsanforderungen. Wenn e_{ij} den Nutzen des Mitarbeiters M_i am Arbeitsplatz A_j repräsentiert, dann besteht das Zuordnungsproblem darin, eine möglichst nutzenmaximale Zuweisung von Mitarbeitern zu Arbeitsplätzen zu erhalten.

1.2.3 Zuschneideproblem

In der Metallverarbeitung werden benötigte Teile aus großen Metallplatten herausgestanzt. Analog müssen beim Zuschneiden von Kleidern die einzelnen Bekleidungsteile unter Beachtung des Musters aus den Stoffbahnen geschnitten werden. Das Zuschneideproblem besteht darin, die herauszustanzenden Teile so anzuordnen, dass der Abfall minimiert wird.

1.2.4 Maschinenbelegungsplanung/Stundenplanproblem

Bei der Produktionsplanung muss im Zuge der Feinterminierung das für den Planungszeitraum vorgesehene Produktionsprogramm entsprechend den Fertigungsstufen auf die jeweils benötigten Maschinen aufgeteilt werden. Zielkriterium dafür ist beispielsweise die Maximierung des Durchsatzes, die Minimierung der maximal benötigten Fertigungszeit oder die Minimierung der Kapitalbindung.
Das Stundenplanproblem ist mit einer Maschinenbelegungsplanung vergleichbar.

1.2.5 Produktionsprogrammplanung

Bei der Produktionsprogrammplanung wird für den Planungszeitraum eine gewinnmaximale bzw. kostenminimale Kombination der absatzfähigen Produkte ermittelt.

Variantes Problem: Diätproblem

Für die Herstellung eines Menüs hat man unter anderem Steaks und Kartoffeln zur Verfügung. 1 Steak enthält 1 Einheit (E) Kohlehydrate, 3 E Vitamine sowie 3 E Proteine und kostet 50 Geldeinheiten (GE). 1 Einheit Kartoffeln enthält 3 E Kohlehydrate, 4 E Vitamine sowie 1 E Proteine und kostet 25 GE. Für das Menü sollen Steaks und Kartoffeln in solchen Mengen verwendet werden, dass eine Person mit einem Menü mindestens 8 E und nicht mehr als 20 E Kohlehydrate, mindestens 19 E Vitamine und 7 E Proteine bekommt. Gesucht ist die kostenminimale Zusammensetzung von Steaks und Kartoffeln.

1.2.6 Transportproblem

Drei Baugeschäfte G_1, G_2, G_3 liefern 300 Säcke Zement an 4 Baustellen B_1, B_2, B_3, B_4. Die Transportkosten je Sack, der Bedarf an Zement an den Baustellen und der Lagerbestand der Baugeschäfte sind in der folgenden Tabelle angegeben. Wie ist der Transport vorzunehmen, damit die gesamten Transportkosten möglichst gering sind?

	G_1	G_2	G_3	Bedarf
B_1	3	7	8	80
B_2	3	1	6	40
B_3	4	5	8	60
B_4	2	8	8	120
Lagerbestand	150	30	120	300

2. Die Entscheidungstheorie

2.1 Unterteilung der Entscheidungstheorie

Inhalt der Entscheidungstheorie:

Die Entscheidungstheorie beinhaltet als Untersuchungsobjekte

a) die Analyse des Entscheidungsprozesses

b) die Analyse des Wahlaktes

Hieraus ergeben sich folgende wissenschaftliche Richtungen einer Entscheidungstheorie:

(1) a) und b) (Gäfgen, 1974)

(2) b) einschließlich Präferenz- und Nutzentheorie (Krelle, 1968)

(3) b) ausschließlich Präferenz- und Nutzentheorie (Bamberg/ Coenenberg, 1996; Laux, 1998)

(4) b) unter Berücksichtigung von Ungewißheit (Schneeweiß, 1967)

Zielsetzung einer Entscheidungstheorie:

Die Differenzierung nach der Zielsetzung ergibt eine Dreiteilung der Entscheidungstheorie in

- empirisch kognitive oder deskriptive
- normative oder präskriptive
- statistische (→ vgl. Statistische Methoden)

Die wichtigsten Kriterien und Unterschiede verdeutlichen das folgende Schaubild (ohne statistische Entscheidungstheorie).

deskriptive Entscheidungstheorie	präskriptive Entscheidungstheorie
Überprüfung der Theorie und ihrer Aussagen an der Realität/ Empirie. Gegenstand der Forschung sind Informationsfindung und -verarbeitung ⇒ offenes Modell: Der Mensch wird in den Entscheidungsprozeß einbezogen.	Axiome und logisch gültige Schlußfolgerungen bilden die Grundlage. Kein Anspruch auf modellkonformes Verhalten der Realität. Jedoch Bemühung, das Modell an der Realität auszurichten. ⇒ geschlossenes Modell: Aktionsraum, Zustandsraum, Ergebnisraum und Nutzen sind gegeben.

Die betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre insgesamt zeigt sich als eine Synthese zwischen präskriptiver und deskriptiver Entscheidungsforschung. Es geht darum, die zentrale Frage der praktisch-normativen BWL zu beantworten: „Wie ist in einer konkreten Situation vorzugehen, so dass ein größtmöglicher Zielerfüllungsgrad verwirklicht wird?“

Hierbei unterstützt die deskriptive Entscheidungstheorie die Erklärungsaufgabe. Sie soll die Entwicklung der Aussagen über die verfolgten Ziele, mögliche Handlungsprogramme sowie die Konsequenzen der alternativen Aktionsprogramme klären. Die Gestaltungsaufgabe fällt der präskriptiven Entscheidungstheorie zu. Normative Entscheidungsmodelle werden zur Ableitung rationaler Problemlösungen bei alternativen Aktionsprogrammen aufgestellt.

Da formale Entscheidungskalküle programmierbar sind, sind sie ein klassisches Gebiet der Wirtschaftsinformatik.

2.2 Grundmodell der Entscheidungslogik

Die Entscheidungslogik macht den Versuch, die Frage zu beantworten, wie man sich in einer konkreten Situation verhalten soll.

2.2.1. Das Grundmodell

Es besteht aus der Menge und Beschreibung der Aktionen des Entscheidungsträgers, den Zuständen der Umwelt sowie dem Ergebnis, das sich aus dem Zusammentreffen von Entscheidungsalternative (= Aktion) und Umweltzustand einstellt. => Aktionsraum A, Zustandsraum S, Ergebnisfunktion g

* **Aktionsraum A** umfaßt alle zur Debatte stehenden Aktionen (Handlungsalternativen). Die Aufstellung muss nach dem Prinzip der vollkommenen Alternativenaufstellung erfolgen.

* **Zustandsraum S** umfaßt die denkbaren Konstellationen der in einer bestimmten Situation relevanten Umweltfaktoren; abhängig vom Kenntnisstand bezüglich des wahren Zustandes unterscheidet man zwischen Ungewißheits-, Risiko- und Sicherheitssitutation. Die Einschaltung eines Informationssystems zur Kenntnisverbesserung bezüglich des wahren Umweltzustandes muss erwogen werden (→ vgl. Abschätzung mit Hilfe des Bayes Theorem).

* **Handlungskonsequenzen** bzw. die Ergebnisfunktion g wird formal mit $g:(a,s) \rightarrow e$, $e = g(a,s)$ beschrieben. Es lassen sich bei der tatsächlichen Konsequenz drei Informationszustände unterscheiden:

- Sicherheit führt zu je einem Ergebnis pro Alternative
- Risiko führt zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über die möglichen Ergebnisse der Alternativen a

- Ungewißheit legt eine Menge potentieller Ergebnisse fest.

Soweit möglich wird von deterministischen Beziehungen ausgegangen. Gründe dafür liegen in dem geringeren Erfassungs- und Rechenaufwand.

Aufbau einer Ergebnismatrix:

		Zustände				
		s_1	s_2	...		s_n
Aktionen	a_1	e_{11}	e_{12}	...		e_{1n}
	a_2	e_{21}	e_{22}	...		e_{2n}
	...	...				
	a_m	e_{m1}				e_{mn}

Wenn im Umweltzustand s_j die Aktionen a_i gewählt wird, dann tritt das Ergebnis e_{ij} ein, aber auch, wenn a_i gewählt wird, und die Umwelt den Zustand s_j einnimmt. Jedoch sind zusätzlich zwei weitere Aspekte der Handlungskonsequenzen zu disaggregieren; einerseits die Ziele als Ergebnisgrößen, bezogen auf ein differenziertes Zielsystem, als auch die Zeitpunkte als Zeitintervalle der Ergebnisrealisation.

Das Zielsystem ist die Menge der verfolgten Zielgrößen, sowie die Präferenzrelationen des Entscheidungsträgers bezüglich der Merkmalsausprägungen der Aktionsresultate. Um eine Rangordnung bezüglich der zur Verfügung stehenden Aktionen zu erstellen, werden Anforderungen an die Inhalte des Zielsystems gestellt. E. Heinen sagt, dass nur generelle Imperative (Großziele) die Voraussetzung sein können für singuläre Imperative (Unterziele, Funktionsziele).

Bestandteile des Zielsystem:

- Zielgrößen (Auswahl der Merkmale)
- Präferenzrelationen (Intensität des Strebens nach den Zielgrößen)
  - Höhenpräferenz
    Maximierungsvorschrift (Minimierungsvorschrift);
    Satisfizierung (anspruchsniveubezogene Präferenz; z.B.: „Erhöhe Umsatz um 10%“)
  - Artenpräferenz
    Rangordnung verschiedener Zielgrößen bzw. Gewichtung unterschiedlicher Zielgrößen; z.B.:
    Maximiere die erwartete Rendite eines Wertpapiers bei gegebenem Risiko
  - Zeitpräferenz, z.B.: Diskontierung von Zahlungsströmen
  - Risiko- + Unsicherheitsrelation

    (Ist immer dann relevant, wenn vollkommene Informationen über die tatsächlichen Konsequenzen von Aktionen fehlen)

Anforderungen an das Zielsystem:

Das Zielsystem setzt sich zusammen aus der Menge der Zielgrößen und der Präferenzrelation des Entscheidungstägers

a) Das Zielsystem muss vollständig sein

b) Die Ziele müssen operational sein . Die Begründung hierfür liegt in dem Rationalitätsbestreben bei der Entscheidungsfindung, des arbeitsteiligen Vollzuges der Entscheidungsprozesse sowie die Ausrichtung des Informationssystems

c) Die Ziele müssen koordinationsgerecht sein (z.B. Opportunitätskosten zur Messung der Zielerreichung von Teilbereichen)

Durch das Zielsystem ergibt sich die Wertschätzung, die man den Ergebnissen der verschiedenen Handlungsalternativen zuordnet. Zu unterscheiden sind ordinale Präferenzfunktionen (= Rangreihung) und kardinale. Die Wertschätzung der Ergebnisse wird hier mit dem kardinalen Nutzen u_{ij} ausgedrückt. Die Präferenzfunktion ist damit reellwertig:

$$U: e_{ij} \rightarrow 3;\ U(e_{ij}) := u_{ij}$$

Im diskreten Fall erhält man eine Entscheidungsmatrix/Nutzenmatrix bestehend aus den Nutzwerten:

		Zustände				
		s_1	s_2	...		s_n
Aktionen	a_1	u_{11}	u_{12}	...		u_{1n}
	a_2	u_{21}	u_{22}	...		u_{2n}
	...	...				
	a_m	u_{m1}				u_{mn}

2.2.2. Entscheidungssituation

Die Entscheidungssituationen können nach der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Umweltzustände unterschieden werden in

a) Sicherheitssituation: Welcher Umweltzustand eintreten wird, steht mit Sicherheit fest

b) Risikosituation: Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände sind bekannt bzw. werden als bekannt angenommen.

c) Ungewißheitssituation: Es ist nur bekannt, dass irgendeiner der Zustände $s_1,..,s_n$ eintreten wird.

Die Situationen b) und c) bezeichnet man auch als Entscheidungssituationen mit mehrfachen Erwartungen, da aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einzelnutzen nicht bekannt ist, welcher sich durch Wahl der Aktion a_i einstellen wird.

2.3 Rationale Nutzenfunktionen

In der Nutzentheorie/Präferenztheorie untersucht man Gesetzmäßigkeiten, denen eine Nutzenzuordnung der Ergebnisse e_{ij} genügen muss, um widerspruchsfrei zu sein. (→ vgl. Arrow; Unmöglichkeitstheorem; welfare economics; soziale Nutzenfunktionen). Es handelt sich dabei um die Fragestellung, welche Präferenzbedingungen die Existenz einer reellwertigen (ordinalen bzw. kardinalen) Präferenzfunktion Φ (je nach Zusammenhang auch als Nutzenfunktion u bezeichnet) garantieren. Entsprechende Untersuchungen gehen auf Debreu (Theory of Value, 1959; dt. Übersetzung: Werttheorie, Springer, 1976) zurück.

Zur Erinnerung:
$A = \{a_1,a_2,..., a_m\}$ Aktionenraum,
$S = \{ s_1,s_2,...,s_n\}$ Zustandsraum (Umweltzustände),
$Z = \{ z_1,a_2,...,z_l\}$ Zielgrößen,

$g: A \times S \to E$, $e_{ij}:= g(a_i,s_j)$, Menge aller Ergebnisse

Definition Rationalität: Widerspruchsfreiheit der Wertschätzung (= Nutzen) möglicher Ergebnisse e_{ij}.

e_{ij} ist definiert als das Ergebnis, welches sich einstellt, wenn die Aktion a_i mit dem Zustand s_j zusammentrifft. Jedes einzelne Ergebnis e_{ij} wird im allgemeinen durch n verschiedene Größen $x_{ij1},..., x_{ijn}$ beschrieben: $e_{ij}= (x_{ij1},..., x_{ijn})$.

Zur Bezeichnung sei folgendes angemerkt:
E = Menge aller Ergebnisse
Die Zweifachindexierung bei e_{ij} wird immer dann verwendet, wenn der Bezug zu (a_i,s_j) wichtig ist. Wenn es gilt Ergebnisse e_{ij} als Elemente der Menge E anzusprechen, dann wird im folgenden nur eine einfache Indexierung verwendet.
Eine Nutzenrelation (= Ordnung) muss den folgenden Rationalitätsaxiomen genügen:

1) Vollständigkeit der Ordnung
Bei beliebigen $e_i,e_j \in E$ mit $e_i \neq e_j$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen:
(a) $e_i > e_j$, d. h. e_i wird e_j vorgezogen
(b) $e_j < e_i$, d. h. e_j wird e_i vorgezogen
(c) $e_i \approx e_j$, d. h. e_i und e_j sind gleichwertig

D.h. bezüglich zweier beliebiger Ergebnisse e_i, $e_j \in E$ ist eine Vergleichbarkeit im obigen Sinne gegeben.

2) Transitivität

Führt man die Beziehung „≥“ als vorziehungswürdig oder gleich, „≈“ als nicht schlechter ein mit

$e_i \geq e_j \Leftrightarrow e_i > e_j$ oder $e_i \approx e_j$, so lautet das Transitivitätsaxiom mit $e_i, e_j, e_k \in E$, $i \neq j$ und $i \neq k$, $j \neq k$:

(a) $e_i \geq e_j$ und $e_j \geq e_k \Rightarrow e_i \geq e_k$

(b) $e_i > e_j$ und $e_j \approx e_k \Rightarrow e_i > e_k$

(c) $e_i \approx e_j$ und $e_j > e_k \Rightarrow e_i > e_k$

3) Reflexivität: Sind zwei Ergebnisse identisch, so ist man indifferent zwischen ihnen

$e_i, e_j \in E$ und $e_i \approx e_j \Rightarrow e_i \approx e_j$

4) Stetigkeit: E ist bezüglich des 3^n eine offene und zusammenhängende Teilmenge

Die Axiome 1 - 4 garantieren die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion u auf der Menge E, d. h. u gibt Auskunft darüber, ob das Ergebnis e_i dem Ergebnis e_j vorgezogen wird, oder ob Indifferenz zwischen e_i und e_j besteht. Eine ordinale Nutzenfunktion gibt keine Auskunft über die Stärke der Präferenz zwischen e_i und e_j. Diese kann nur aus einer kardinalen Nutzenfuktion abgelesen werden.

Um die Existenz einer kardinalen Nutzenfunktion sicherzustellen, sind neben den o. g. Axiomen 1 - 3 weitere Bedingungen für die Nutzendifferenzen (= Nutzenunterschiede), also die Menge $\{u(e_i) - u(e_j): e_i, e_j \in E\}$, zu fordern. Kardinale Nutzenfunktionen sind in der Regel nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf monoton wachsende lineare Transformationen. In anderen Worten: Der Nutzennullpunkt und die Nutzeneinheit sind willkürlich wählbar!

2.4 Rationalität und risikobehaftete Entscheidungen

Eine Ungewissheitssituation ist durch die unbekannten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen bestimmter Umweltzustände gekennzeichnet, eine Entscheidung unter Risiko dagegen mit bekannten Wahrscheinlichkeiten.

		Zustände mit Wahrscheinlichkeiten				
		s_1 p_1	s_2 p_2	...		s_n p_n
Aktionen	a_1	u_{11}	u_{12}	...		u_{1n}
	a_2	u_{21}	u_{22}	...		u_{2n}
	...	...				
	a_m	u_{m1}				u_{mn}

Nimmt man die Nutzenbewertungen $u_{i,j}$ als gegeben an, dann stellt sich die Frage, wie sich unser Entscheidungssubjekt verhalten soll. Dazu werden in der Literatur unterschiedliche Vorschriften Φ diskutiert, die auf der Menge der Alternativen A eine (Nutzen-)Bewertung vornehmen und damit auf A eine (kardinale) Präferenzfunktion definieren.

Φ: A → $\Re$ heißt folglich Präferenzfunktional oder auch Entscheidungsregel, Entscheidungsfunktion bzw. Auswahlregel.

2.4.1 Zwei-Personen-Nullsummenspiel am Beispiel

Durch Wahl der Aktion a_i erhält der Entscheidungsträger (hier der Zeilenspieler) den Betrag u_{ij} ausbezahlt (falls $u_{ij} > 0$; bei $u_{ij} < 0$ zahlt der ET u_{ij} Geldeinheiten ein), der dem eintretenden (zum Zeitpunkt der Wahl von a_i nicht bekannten) Umweltzustand s_j zugeordnet ist.

Problem: Wahl der „besten“ Alternative a_i

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	1,5	2	-1	0,5	3
a_2	6	5	4	4,5	5
a_3	2	-1	3,5	6	7
a_4	1	4	3	7	2

Zunächst: a_2 ist bezüglich jedes Umweltzustandes besser als der entsprechende Nutzenwert von a_1. Man sagt: „a_2 dominiert a_1“. a_1 kann folglich wegen Ineffizienz aus den weiteren Betrachtungen gestrichen werden.

Spezielle Entscheidungsregeln:

1) Maximin-Regel (Wald-Regel)

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow \min_k u_{ik} \geq \min_k u_{jk}$$

folglich: $\Phi(a_i) := \min_j u_{ij}$

Entsprechend: a_k ist die optimale Alternative, falls $\Phi(a_k) := \max_i \Phi(a_i) = \max_i \min_j u_{ij}$

Im Beispiel würde die Alternative a_2 gewählt. Die Maximin-Regel gilt als Pessimisten-Regel. Sie unterstellt das Eintreten des ungünstigsten Zustandes s_j und richtet danach die Entscheidungsstrategie aus: Wahl der besten Variante unter allen denkbar ungünstigsten Situationen (= vorsichtige Strategie!).

2) Maximax-Regel

$\Phi(a_i) := \max_j u_{ij}$

Entsprechend obiger Bemerkung ist die Maximax-Regel Ausdruck eines unverbesserlichen Optimismus.

3) Hurwicz-Regel

Man wählt eine Konvexkombination der pessimistischen Betrachtung gemäß Maximin und der optimistischen Betrachtung gemäß Maximax.

$y \in [0,1]$: Optimismusparameter, kardinale Nutzenfunktion

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow y \cdot \max_k u_{ik} + (1-y) \cdot \min_k u_{ik} \geq y \cdot \max_k u_{jk} + (1-y) \cdot \min_k u_{jk}$$

$$\Phi(a_i) := y \cdot \max_k u_{ik} + (1-y) \cdot \min_k u_{ik}$$

4) Laplace-Regel

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow \sum_k u_{ik} \geq \sum_k u_{jk}$$

$\Phi(a_i) := \sum_k u_{ik}$ (Summe der möglichen Auszahlungen)

Diese Regel unterstellt Gleichwahrscheinlichkeit aller Umweltzustände mit der Argumentation, dass man von keinem Zustand sagen kann, er sei wahrscheinlicher als ein anderer.

5) Savage -Niehans-Regel

Bei der Savage-Niehans-Regel wird zunächst die Opportunitätskostenmatrix $s_{ij} := (\max_k u_{kj}) - u_{ij}$ gebildet. Ihre Koeffizienten beinhalten den entgangenen Nutzen der sich beim Umweltzustand j einstellt, wenn nicht die optimale Alternative gewählt wurde. Auf diese Opportunitätskostenmatrix wird dann die Mini-Max-Regel angewandt. Der entgangene Gewinn ist zu minimieren, deswegen ist die "beste" Alternative, die mit kleinstem Φ-Wert.

D. h. $\Phi(a_i) := \max_j s_{ij}$ und a_k ist die optimale Alternative, falls $\Phi(a_k) := \min_i \Phi(a_i) = \min_i \max_j s_{ij}$

6) Krelle-Regel

Aufstellen der für Entscheider typischen Unsicherheitspräferenzfunktion ω (siehe z.B. das Beispiel bei Bamberg/Coenenberg, S. 105ff).

$$\Phi(a_i) := \sum_j \omega(u_{ij})$$

Gewählt wird die Alternative a_k mit $\Phi(a_k) = \max \Phi(a_i)$

Unterstellt man eine Gleichwahrscheinlichkeit jedes Umweltzustandes s_j (j = 1,.., n), so kann der Ausdruck $\frac{1}{n} \sum_j \omega(u_{ij})$ (und damit bis auf den konstanten Faktor die Krelle-Regel) als individuell erwartete Auszahlung interpretiert werden.

7) Bayes Regel (Voraussetzung: W. für die Wahl der Spalte gegeben)

$\Phi(ai) \geq \Phi(aj) \Leftrightarrow \Sigma\, u_{i,k}\, p_k \geq \Sigma\, u_{j,k}\, p_k$, d.h. wenn die korrespondierenden Erwartungswerte μ größer oder gleich sind. Die Laplace-Regel ist ein Sonderfall ($p_i = 1/n$) der Bayes Regel

2.4.2 Probleme von Entscheidungen unter Risiko

Eine Theorie von Entscheidungen unter Risiko versucht, Kriterien zu entwickeln, die es erlauben aus einer Anzahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine oder mehrere als die Besten zu bestimmen. Dabei wird ein Präferenzfunktional Φ entwickelt, welches eine Ordnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen erlaubt. Gefragt wird, unter welchen Bedingungen Φ bzw. die dadurch bedingte Entscheidung als „rational" gelten kann.

Beispiel 1: (Nutzenmatrix)

	s_1 p_1=0,5	s_2 p_2=0,5
a_1	100	-100
a_2	-100	100
a_3	100	100
a_4	200	200
a_5	100	300
a_6	0	500

Offensichtlich: $a_1 \approx a_2 < a_3 < a_4$

Wie sind jedoch die Beziehungen a_4 ? a_5 sowie a_5 ? a_6 zu bewerten.

Folgerung:

a) Aus den gegebenen Daten kann das Entscheidungsverhalten nicht prognostiziert werden

b) Einige der Aktionen sind unmittelbar vergleichbar, andere nicht unbedingt. Ist Transitivität vorhanden ?

$a_6 \geq a_2$ und $a_2 \approx a_1 \Rightarrow a_6 \geq a_1$ (a_1 kann sich jedoch ex post als günstiger erweisen, wenn s_1 eintritt)

Beispiel 2: (Brandversicherung)

Es soll die Frage gelöst werden, ob es sinnvoll ist, eine Brandversicherung abzuschließen oder nicht. Die Prämie für die Brandversicherung beträgt 2500 DM. Die Versicherungssumme beträgt 20 Mio DM (der Einfachheit halber ist die Summe gleich der im Schadensfall zu erwartenden Kosten). Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schaden eintritt, liegt bei $p = 10^{-4}$

Ergebnismatrix

	s_1 $p_1=10^{-4}$	s_2 $p_2=1-10^{-4}$
a_1	-2500	-2500
a_2	$-20 \cdot 10^6$	0

s_1 = Schadensfall

s_2 = kein Schadensfall

a_1 = Versicherungsabschluß

a_2 = kein Versicherungsabschluß

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow \sum_k u_{ik} \cdot p_k \geq \sum_k u_{jk} \cdot p_k$$

Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz

Sei a_i eine risikobehaftete Entscheidungsalternative. Als **Sicherheitsäquivalent** $S(a_i)$ bezeichnet man genau den Einkommensbetrag, der als gleichwertig mit der unsicheren Alternative von dem ET angesehen wird. Das Sicherheitsäquivalent lässt sich von dem Gedanken leiten, dass der ET die unsichere Alternative bereits besitzt und überlegt, für welchen Einkommensbetrag (= sichere Alternative, da er ihn erhalten würde) er die unsichere Alternative verkauft. Beispiel: Angenommen, sie besitzen ein Lotterielos, das mit 90%-iger W. eine Niete ist und mit 10%-iger W. einen Gewinn von DM 1000,- abwirft. Frage, zu welchem Preis (= sicheres Einkommen), sind sie bereit das Los zu verkaufen?
Sicherheitsäquivalent = Mindestkompensationsbeitrag

Der Maximaleinsatz kennzeichnet die umgekehrte Position: Er geht aus von der Situation des Erwerbers einer unsicheren Alternative und fragt, welchen Betrag der Erwerber maximal bieten würde, um in den Besitz der unsicheren Alternative zu gelangen.

$\Phi[S(a_i)] = \Phi[E_i]$	Sicherheitsäquivalent: Die Wertschätzung Φ des Sicherheitsäquivalents ist identisch der Wertschätzung des Erwartungswertes
$\Phi[E_i - M(a_i)] = \Phi[0]$	Maximaleinsatz: Die Wertschätzung Φ des Erwartungswertes abzüglich dem Maximalwert ist identisch der Wertschätzung der Alternative Null.

2.5 Das Bernoulli-Prinzip

Das Bernoulli-Prinzip ist das bekannteste Axiomensystem einer Entscheidung unter Risiko. Es strebt an, aus einer Anzahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine oder mehrere als die Besten zu bestimmen. Dabei wird ein Präferenzfunktional entwickelt, welches eine Ordnung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen erlaubt.

2.5.1 Nutzung des Bernoulli-Prinzip

Das Bernoulli-Prinzip sagt nun aus, dass eine subjektive Nutzenfunktion U(x) bei dem Entscheidungsträger existiert, mit der Eigenschaft, dass die verschiedenen Aktionen aufgrund des zugehörigen Erwartungswertes beurteilt werden. Auf der Menge aller zufallsabhängigen Auszahlungen X_i bedeutet dies:

$a_i \geq a_j \Leftrightarrow EU(X_i) \geq EU(X_j)$

$X_i = (X_{i1}, X_{i2},...)$ (Auszahlungen bei den Aktionen a_i)

$X_j = (X_{j1}, X_{j2},...)$ (Auszahlungen bei den Aktionen a_j)

In einer Entscheidungssituation ist also diejenige Alternative zu wählen, für die der Erwartungswert des Nutzens E[U(X)] am größten ist. Die Konkretisierung für das Beispiel 2 ergibt folgendes:

$EU(X_1) = U(-2500) \cdot 10^{-4} + U(-2500) \cdot (1-10^{-4})$
$EU(X_1) = U(-2500)$
$EU(X_2) = U(-20 \cdot 10^6) \cdot 10^{-4} + U(0) \cdot (1-10^{-4})$

U ist bis auf monotone lineare Transformationen festgelegt, d.h. der Übergang von U zu U', $U' = \alpha \cdot U + ß$, α, ß ∈ 3 ändert nicht die Relation zwischen den Erwartungswerten bzw. Präferenzen. Eine häufige Normierung ist: U(0) = 0, U(1) = 1

Existenz eines Präferenz-Funktionals Φ zum Bernoulli Prinzip

Ein Präferenz-Funktional Φ ist eine Abbildung, die der Menge der zufallsabhängigen Auszahlungen X einen reellen Wert zuweist (Φ: X → 3). Dabei gilt: $a_i \geq a_j \Leftrightarrow \Phi(X_i) \geq \Phi(X_j)$

D. h.: Die Alternative a_i wird a_j vorgezogen oder gleichgestellt, wenn Φ angewendet auf die a_i zugeordnete Auszahlung X_i einen Wert $\geq \Phi(X_j)$ liefert.

Die Maximierung des Nutzenerwartungswertes ist für einen Entscheider sinnvoll, sofern er einige Axiome rationalen Verhaltens akzeptiert. Dieses Axiomensystem muss durch das Präferenzfunktional Φ des Bernoulli-Prinzips erfüllt sein. Zu diesem Axiomensystem gehören die nachfolgend aufgeführten Prinzipien.

Ordinales Prinzip:

a) X_i, X_j zufallsabhängige Auszahlungen. Dann gilt: $X_i \geq X_j$ oder $X_j \geq X_i$ (Vollständigkeit)

b) X_i, X_j, X_k zufallsabhängige Auszahlungen. Dann gilt: $X_i \geq X_j$, $X_j \geq X_k \Rightarrow X_i \geq X_k$ (Transitivität)

Dominanzprinzip:

Unabhängig von der Risikoneigung hat ein Entscheidungsträger von zwei Entscheidungsalternativen die vorzuziehen, die bei gleicher Wahrscheinlichkeit einen höheren Zielbeitrag (Nutzendominanz) bzw. bei gleichem Zielumfang eine höhere Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeitsdominanz) verspricht.

Stetigkeitsprinzip

Ein Sicherheitsäquivalent ist eine sichere Auszahlung X_s und bleibt zu einer zufallsabhängigen Auszahlung X indifferent ($X_s \approx X$) (gleichwertiger Nutzen wie die unsichere Alternative); man bezeichnet X_s auch als Sicherheitsäquivalent von X. Jede zufallsabhängige Auszahlung X besitzt (mindestens) ein Sicherheitsäquivalent. Im Beispiel 1 führt a_4 zu einer sicheren Auszahlung von 200. Gilt für den Entscheidungsträger $a_5 \approx a_4$, so ist $X_s = 200$ das Sicherheitsäquivalent der zufallsabhängigen Auszahlung X mit p(X=100) = p(X=300) = 0,5

Substitutionsprinzip

X, Y, Z seien zufallsabhängige Auszahlungen, p sei ein Wahrscheinlichkeitswert aus (0,1). Unter XpZ sei eine zufallsabhängige Auszahlung verstanden, die mit der Wahrscheinlichkeit p mit der zufallsabhängigen Auszahlung X und mit (1-p) mit Z zusammenfällt. Dann besagt das Substitutionsprinzip, dass $X \geq Y \Leftrightarrow XpZ \geq YpZ$.

Die aufgezählten Prinzipien sind notwendig für das Bernoulli-Prinzip; ergänzt um weitere Kriterien sind sie hinreichend. Das Bernoulli-Prinzip als Rationalitätspostulat macht keine Aussagen über die Form der Nutzenfunktion, sondern nur über die Form des Präferenzfunktionals. Es schränkt jedoch die Menge der denkbaren Nutzenfunktionen, die für eine rationale Entscheidung bei Risiko denkbar sind, entsprechend der subjektiven Einstellung des Entscheidungsträgers zum Risiko, ein. Das Bernoulli-Prinzip unterscheidet sich von den klassischen Entscheidungsregeln durch die Abhängigkeit des Präferenzfunktionals von der gesamten Nutzenverteilung, während bei den klassischen Entscheidungsregeln von den statistischen oder anderen Maßzahlen der Verteilung (Erwartungswert, Modus, Mittelwert usw.) ausgegangen wird. Deshalb sind sie in den seltensten Fällen „Bernoulli-rational".

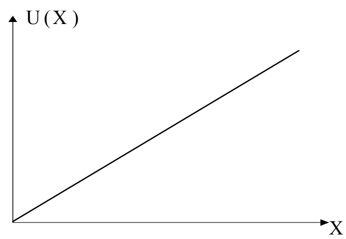
2.5.2 Bestimmung der Risiko-Nutzenfunktion RNF (Bitz, S. 158ff, Bamberg/Coenenberg, S. 105f)

1. Schritt: Normierung. Das Nullereignis (entspricht dem ungünstigsten Ereignis e´), e´ = 0, erhält den Nutzen 0: u(0) = 0 bzw. u(e´)=0.

   Das günstigste Ereignis e´´, häufig mit e´´ = 1 bezeichnet, erhält den Nutzenwert 1, u(e´´) = 1.

2.5.3 Typen von Nutzenfunktionen und Risikoverhalten

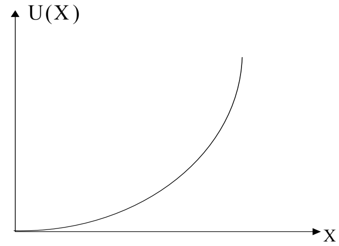
1) Lineare Nutzenfunktion U(X) = X



Ein Entscheidungsträger mit dieser Nutzenfunktion beurteilt eine Aktionen allein aufgrund des Erwartungswertes der Auszahlung; für den Erwartungswert des Nutzens gilt somit: E[U(X)] = E[X].

Der Nutzen einer sicheren Auszahlung ist U(X). Der Entscheidungsträger nimmt keine Notiz davon, wie sehr die Erwartungswerte um die mögliche Auszahlung streuen. Ein Verhalten, welches der linearen Nutzenfunktion entspricht, nennt man im allgemeinen risikoneutrales Verhalten; das Sicherheitsäquivalent stimmt mit dem Erwartungswert überein.

2) Konvexe Nutzenfunktion

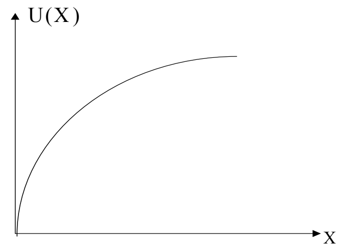


Der Nutzenerwartungswert einer zufallsabhängigen Auszahlung ist: $\Sigma U(x_i)p_i$

Der Nutzenerwartungswert einer sicheren Auszahlung in Höhe des Erwartungswertes ist: $U(\Sigma x_i\, p_i)$

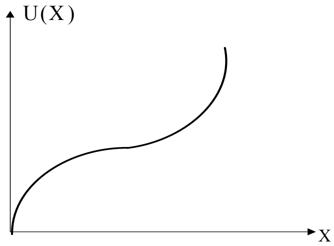
Da für konvexes U die Jensen‘sche Ungleichung besagt, dass $U(E[X]) = U(\Sigma x_i\, p_i) \leq \Sigma\, U(x_i)\, p_i = E(U(X))$ gilt, ist die zufallsabhängige Auszahlung X der sicheren Auszahlung in Höhe des Erwartungswertes vorzuziehen. Eine sichere Auszahlung muss, damit sie X gleichwertig wird, größer als E[X] sein. Das Sicherheitsäquivalent von X ist größer als der Erwartungswert E[X]. Ein derartiges Verhalten ist durch Risikosympathie gekennzeichnet und der Entscheidungsträger handelt risikofreudig (Glücksspieler). Auch durch den Verlauf von U(X) wird klar, dass der Grenznutzen des Entscheiders bei zunehmenden Ergebniswerten steigt.

3) Konkave Nutzenfunktion



Der Entscheidungsträger bewertet große Verluste überproportional, große Gewinne dagegen unterproportional, somit ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie bei 2); nur hier mit umgekehrten Vorzeichen. Das Sicherheitsäquivalent einer zufallsabhängigen Auszahlung X ist kleiner als der Erwartungswert. Das Verhalten wird als Risikoaversion oder Risikoscheu bezeichnet.

4) Friedmann-Savage Nutzenfunktion



Es wird von dem empirischen Befund ausgegangen, dass Entscheidungsträger gleichzeitig ein risikoscheues und risikofreudiges Verhalten zeigen, d. h. die Nutzenfunktion sowohl konvexe als auch konkave Stücke enthält. Einer ersten Risikosymphatie bei kleinen Auszahlungen weicht eine Risikoscheu bei größeren Auszahlungsmöglichkeiten.

2.6. Grundmodelle der Spieltheorie

2.6.1 Grundbegriffe und Einführung

Auch die Spieltheorie ist wie die Entscheidungslogik eine normative Theorie, deren Grundmodell sich an einer Konfliktsituation orientiert. Jedoch tritt bei der Spieltheorie im Gegensatz zur Entscheidungslogik anstelle des Zufalls, der die Zustände bei Ungewißheitsentscheidungen bestimmt, der rational handelnde Gegenspieler, dessen Zielfunktion sich gewöhnlich von der des Spielers unterscheidet. Spielmodelle sind also Konfliktmodelle. Zusammenfassend kann man sagen, dass der Unterschied zur Entscheidungslogik in zwei Bereichen besteht:

- Anstelle der Umwelt wird ein rational handelnder Gegenspieler angenommen
- Auszahlungen sind bereits gemäß einer Bernoulli-Nutzenfunktion in Nutzen transferiert, d. h. man spricht daher vereinfachend von "Auszahlungen" an die Spieler

Im Rahmen gewisser Spielregeln können die Spieler „Züge“ wählen, die den Aktionen im Entscheidungsmodell entsprechen. Eine Folge von Zügen ist die Strategie eines Spielers. Durch die unterschiedlichen Strategien wird der Spielverlauf bestimmt. Die Klassifizierung ist anhand verschiedener Kriterien möglich:

- Zahl der beteiligten Personen
- Art der Gewinnverteilung
- Grad der Kooperation
- Grad der intervenierenden Zufälligkeit
- Informationsgrad der Spieler
- Art und Menge der den Spielern zur Verfügung stehenden Strategien

Ein Spiel wird in Normalform ausgeführt, wenn jeder Spieler nur eine Wahlmöglichkeit hat. Ein Spiel in extensiver Form bedeutet, dass jeder Spieler öfter am Zuge sein kann, also mehrere Strategien wählen kann. Zwei-Personenspiele mit endlicher Spieldauer lassen sich in Spiele in Normalform überführen, die die folgende Struktur haben (Bi-Matrix-Spiel)

		Spaltenspieler				
		S_1	S_2	...		S_n
Zeilenspieler	Z_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})			(a_{1n}, b_{1n})
	Z_2	(a_{21}, b_{21})				
	...					
	Z_m	(a_{1m}, b_{1m})				(a_{nm}, b_{nm})

a_{ij} = Auszahlung an Zeilen-Spieler bei der Strategie (Z_i, S_j)

b_{ij} = Auszahlung an Spalten-Spieler bei der Strategie (Z_i, S_j)

Die Werte S_1 bis S_n sind die Strategiemöglichkeiten des Spaltenspielers, also seine Strategiemenge; entsprechendes gilt für die Strategiemenge des Zeilenspielers.

(Z_i, S_j) = Strategiepaar

Jedes Strategiepaar ist durch eine bestimmte Auszahlungssituation für die beiden Spieler gekennzeichnet.

$u_z(Z_i,S_j) = a_{ij}$ Auszahlung an den Zeilen-Spieler

$u_s(Z_i,S_j) = b_{ij}$ Auszahlung an den Spalten-Spieler

Ein Spiel T in Normalform ist charakterisiert durch $(Z,S;u_z,u_s)$. Damit ist auch in allgemeiner Form die Definition für ein N-Personen-Spiel (N Teilnehmer) wie folgt gegeben:

A_i = Aktionenmenge (= Strategiemenge) des Spielers i (nicht unbedingt endlich); $(a_1, a_2,..., a_N)$ mit $a_i \in A_i$: Strategie N-Tupel halten die Entscheidung jedes Spielers fest.

Wird $(a_1, a_2,..., a_N)$ gewählt, so hat Spieler i den Nutzen $u_i(a_1, a_2,...,a_N)$.

$u_i: A_1 \times A_2 \times A_3 \times .. \times A_N \rightarrow 3$ (Auszahlungsfunktion an Spieler i, i = 1,.., N)

$T = (A_1, A_2, A_3,...,A_N; u_1, u_2,..., u_N)$

2.6.2 Das Zweipersonen-Nullsummenspiel

Gilt in dem Bi-Matrix-Spiel $a_{ij} = -b_{ij}$, d. h. die Auszahlung an den Zeilenspieler ist gleich dem Verlust des Spaltenspielers und umgekehrt, so handelt es sich um ein Zweipersonen-Nullsumenspiel. Die Angabe der b_{ij} wird dann nicht länger benötigt.

Allgemeine Struktur:

		Spaltenspieler				
		S_1	S_2	...		S_n
Zeilenspieler	Z_1	a_{11}	a_{12}			a_{1n}
	Z_2	a_{21}				
	...					
	Z_m	a_{m1}				a_{nm}

Wählt der Spieler eine Strategie Z_k, so erhält er mindestens $a_k = \min \{a_{kj}, j = 1,..., n\}$; dies sei die untere Schranke seiner Auszahlung. Eine Strategie des Zeilenspielers sieht also wie folgt aus; er wird versuchen seine unterste Schranke möglichst hoch zu wählen, seine günstigste Wahl ist die Strategie Z_* bei der $a_* = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ (a_* = untere Schranke des Spiels bei Verwendung der reinen Strategie). Der Spaltenspieler dagegen verliert bei einer Strategie S_l höchstens $a_l = \max\limits_i a_{il}$, er versucht also seine jeweiligen Verlust zu minimieren. Die obige Matrix stellt aus seiner Sicht eine Schadensmatrix dar. Seine optimale Strategie S^* liefert $a^* = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ (a^* = obere Schranke des Spiels bei Verwendung der reinen Strategie)

Satz (obere und untere Schranken): Falls sowohl der Zeilenspieler als auch der Spaltenspieler eine Minimax-/Maximin-Strategie verwenden, ergibt sich stets $a_* \le a^*$ (die untere Schranke des Spieles ist kleiner oder gleich der oberen Schranke des Spieles bei Verwendung der reinen Strategie).

Beweis:

Es seien i_0, j_0 beliebig aber fest gewählt mit $1 \le i_0 \le m$, $1 \le j_0 \le n$.

Das Minimieren in der festen Zeile i_0 ergibt $a_{i_0 j_*}$, das Maximieren in der festen Spalte j_0 ergibt $a_{i_* j_0}$.

Dabei gilt stets $\max\limits_i a_{ij_0} = a_{i_* j_0} \ge a_{i_0 j_*} = \min\limits_j a_{i_0 j}$ $\qquad \aleph$.

Da i_0 und j_0 beliebig gewählt waren, gilt $\aleph$ auch für das j_0, bei dem $\max\limits_i a_{ij_0}$ minimal wird und auch für das i_0, bei dem $\min\limits_j a_{i_0 j}$ maximal wird und somit folgt insgesamt: $a^* = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \ge \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = a_*$

Satz (Sattelpunkt und Wert des Spiels):

Der Sattelpunkt und Wert des Spiels ist erreicht, wenn gilt: $a_* = a^*$. Es wird a^* bzw. a_* Wert des Spieles genannt; ist $a^* = a_* = 0$, so heißt das Spiel fair.

Definition: Gleichgewichtspunkt (= Sattelpunkt)

Das Indexpaar (i_0,j_0) bzw. das Strategiepaar (Z_{i_0},S_{j_0}) heißt Gleichsgewichtspunkt, wenn für alle i und j gilt:

$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$.

Interpretation:

a) Wenn der Spaltenspieler die Strategie j0 verfolgt, dann reagiert der Zeilenspieler am besten ebenfalls mit der Strategie i0.

b) Wenn der Zeilenspieler die Strategie i0 verfolgt, dann reagiert der Spaltenspieler am besten ebenfalls mit der Strategie j0. Insgesamt führt dies zu einer Stabilität.

D. h. realisiert der Zeilenspieler bei gegebenem j_0 nicht die Strategie Z_{i_0}, bzw. realisiert der Spaltenspieler bei gegebenem i_0 nicht die Strategie S_{j_0}, so stellen sie sich schlechter als bei Wahl der entsprechenden Strategien.

Satz:

Existiert das Strategiepaar (Z_{i_0}, S_{j_0}) als Gleichsgewichtspunkt $\Leftrightarrow a^* = a_*$.

Beweis „⇒“ (Rückrichtung direkt ersichtlich):

i_0 ist so gewählt, dass $a_* = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i_0 j} \geq a_{i_0 j_0}$ $\aleph$ (ergibt sich aus Gleichgewichtspunktdefinition)

j_0 ist so gewählt, dass $a^* = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0}$ $\Im$ (ergibt sich aus Gleichgewichtspunktdefinition)

Es ist dann $a^* = a_*$, wenn in $\aleph$ und $\Im$ jeweils Gleichheit gilt. Und dies ist nach obigem Satz zu oberen und unteren Schranken gegeben (sonst ergibt sich ein Widerspruch).

Die Beziehungen $\aleph$ und $\Im$ sind definitorisch für einen Gleichgewichtspunkt.

Beispiel für die Bestimmung eines Gleichgewichtspunkt:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Z_1	1,5	2	-1	0,5	3
Z_2	6	5	$\boxed{4}$	4,5	5
Z_3	2	-1	3,5	6	7
Z_4	1	4	3	7	2

Der Wert (Z_2,S_3) ist zugleich Zeilenminimum und Spaltenmaximum, d. h. (Z_2,S_3) ist der Gleichgewichtspunkt (GLGP). Der Wert des Spiels ist 4.

2.6.3 Spiele ohne Sattelpunkt und mit gemischter Strategie

Bei häufiger Wiederholung ist es bei Fehlen eines Sattelpunktes unklug, die vorsichtige Strategie ausschließlich zu verfolgen. Die Spieler werden die Strategie in der einen oder anderen Form variieren. Wenn die Spieler abweichend von dem Minimax-/Maximin-Strategie versuchen, ihre Auszahlungen zu vergrößern, geraten sie in Gefahr, dass durch die Reaktion des Gegenspielers die Auszahlung letztendlich verringert wird. Die Auszahlung kann nur dadurch erhöht werden, dass der Gegenspieler über die Auswahl der Strategie im unklaren gelassen wird. Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass die Auswahl der Strategien zufällig erfolgt. p_i ist nun die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeilenspieler die Strategie Z_i spielt, wogegen q_j die Wahrscheinlichkeit ist, mit der der Spaltenspieler die Strategie S_j spielt. Die einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen p bzw. q über $\{Z_1,.., Z_m\}$ bzw. $\{S_1,.., S_n\}$ für den Zeilen- und Spaltenspieler heißen gemischte Strategien. Dabei ist $p_i \geq 0$, $\Sigma\, p_i = 1$; $q_i \geq 0$, $\Sigma\, q_i = 1$.

Die konkreten Auszahlungen sind jetzt nicht mehr aussagekräftig, man muss zum Erwartungswert der Auszahlungen übergehen. Dabei überführt nun jeder der Spieler die Ergebnismatrix in eine bedingte Erwartungswert-Matrix der Auszahlungen. Für den Zeilenspieler ergibt sich der Erwartungswert der Auszahlung als

$$E(p,q) = \sum_i \sum_j p_i \cdot q_j \cdot a_{ij} = p^T \cdot A \cdot q \text{ (entspricht dem Verlust des Spaltenspielers)}$$

Wählen nun die jeweiligen Gegenspieler reine Strategien, so ergibt sich die untere bzw. obere Auszahlungsschranke als :

$$a_* = \max_p \min_j E(p,S_j) \text{ für den Zeilenspieler}$$

$$a^* = \min_q \max_i E(q,Z_i) \text{ für den Spaltenspieler}$$

Definition:

Das Paar der gemischten Strategie (p_0,q_0) heißt Sattelpunkt (dort gilt $a^*=a_*$) oder Gleichgewichtspunkt des Spieles, wenn $E(p,q_0) \leq E(p_0,q_0) \leq E(p_0,q)\ \forall\ p, q$

p_0 bzw. q_0 heißen gemischte optimale Mini-Max Strategien der Spieler und $a_* = a^* = w$ heißt der gemischte Wert des Spieles, wobei jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit endlich vielen reinen Strategien eine Wert w besitzt.

2.6.4 Zweipersonen-Nichtnullsummenspiele

In diesem Fall wird die Einschränkung des $a_{ij} = -b_{ij}$ fallengelassen, um die allgemeine Struktur aufzudecken. Man unterscheidet zwischen nicht kooperativen und kooperativen Spielen, wobei wir uns den ersten zuwenden. Im Gegensatz zum Nullsummenspiel besteht nun kein einheitlicher Wert des Spieles, sondern die Mindestgewinne müssen wie folgt definiert werden.

$$aZ_* = \max_p \min_q EZ(p,q)$$

$$aS^* = \min_q \max_p ES(p,q)$$

In Analogie zum Nullsummenspiel können beim Nichtnullsummenspiel Gleichgewichtspunkte bestimmt werden.

Definition: Gleichgewichtspunkt im Bi-Martix-Spiel

Das Strategiepaar (p_0,q_0) heißt Gleichgewichtspunkt oder Paar der Gleichgewichtsstrategien, wenn für die Erwartungswerte der Auszahlung $EZ(p,q) := p^TAq$

$ES(p,q) := p^TBq$

gilt

$EZ(p,q_0) \leq EZ(p_0,q_0)$ für alle p

$ES(p_0,q) \leq ES(p_0,q_0)$ für alle q

Satz (Gleichgewichtspunkt im Bi-Matrix-Spiel):

Ein Bi-Matrix-Spiel (Zwei-Personen Nichtnullsummenspiel mit endlicher Strategiemenge) besitzt einen Gleichgewichtspunkt in seiner gemischten Erweiterung.

Zur Verdeutlichung dieses Problems wird ein Beispiel erläutert, welches in der Literatur auch als Ehekonflikt bzw. Battle of sexes bezeichnet wird. Ein weiteres Beispiel (Gefangenendilemma) wird in Zimmermann, H.-J. (1987), S. 33 erläutert.

a) Beispiel: Battle of Sexes

Ein Mann A und eine Frau B wollen sich je einzeln eine Eintrittskarte für eine Abendveranstaltung besorgen. Für beide besteht nun die Auswahl zwischen einem Boxkampf (Z_1 bzw. S_1) und einer Ballettvorführung (Z_2 bzw. S_2). Der Mann zieht den Boxkampf, die Frau das Ballett vor. Übereinstimmend bewerten jedoch beide die Möglichkeit, jeweils getrennt voneinander die eine oder andere Veranstaltung zu besuchen, ausgesprochen negativ. Die so skizzierte Spielsituation kann durch folgende Matrix verdeutlicht werden.

	S_1	S_2
Z_1	(2,1)	(-1,-1)
Z_2	(-1,-1)	(1,2)

Das Spiel besitzt zwar einen Gleichgewichtspunkt (Z_1,S_1) und (Z_2,S_2) in dem Sinne, dass die Strategie eines Spielers jeweils besser ist als seine andere, jedoch sind diese beiden Paare unsymmetrisch und bevorzugen jeweils einseitig einen der beiden Spieler. Die anderen beiden Paare sind dominiert und damit indiskutabel. Wie bereits bei dem ersten Spiel bringt der Übergang zur gemischten Erweiterung ebenfalls keine befriedigende Lösung. Als Lösung erhält man für den Zeilenspieler die gemischte Strategie $p_1 = 3/5$, $p_2 = 3/5$ und für den Spaltenspieler $q_1 = 3/5$, $q_2 = 2/5$. Die neu hinzugekommene Gleichgewichtsauszahlung beträgt für jeden Spieler 1/5. Damit sind jedoch die als kritisch betrachteten Strategien (Z_1,S_1) und (Z_2,S_2) besser.

3. Lineare Programmierung

Die Lineare Programmierung kann man als das Optimieren von linearen Funktionen unter Nebenbedingungen verstehen, wobei die Grundproblemstellung folgende Struktur aufweist:

Maximiere $f(x)$ (= Zielfunktion)

so dass $g_i(x) \leq,=,\geq b_i$, $i = 1,..,n$ (Lösungsraum)

f, g_i lineare Funktionen

1. Beispiel: Produktionsprogrammplanung

Ein Betrieb stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her unter Benutzung von 3 Maschinen (M_1,..,M_3). P_1 wird auf M_1 und M_2 gefertigt und beansprucht pro Stück die jeweiligen Maschinen mit einer Zeiteinheit (ZE). P_2 wird auf M_2 und M_3 gefertigt. P_2 benötigt pro Stück auf M_2 zwei Zeiteinheiten und auf M_3 eine Zeiteinheit. Pro Planungsperiode betragen die Einsatzzeiten von M_1,..,M_3 jeweils 4,8,3 ZE. Der Deckungsbeitrag von P_1 bzw. P_2 beträgt 2 bzw. 5 GE. Die Frage stellt sich, welches die gewinnmaximale Produktkombination ist ?

1.1 Überführung in eine formale Aufgabenstellung

Ansatz: x_i := Fertigungsmenge in Stück von P_i ($i = 1,2$)

$$
\begin{aligned}
&\max\ 2x_1 + 5x_2 \\
&\quad x_1 \leq 4 \\
&\quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&\quad x_2 \leq 3 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Definition:

$$\max\ c^T x + d$$

$$Ax \leq b \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n};\ c, x \in \mathbb{R}^n;\ b \in \mathbb{R}^m$$

$$x \geq 0$$

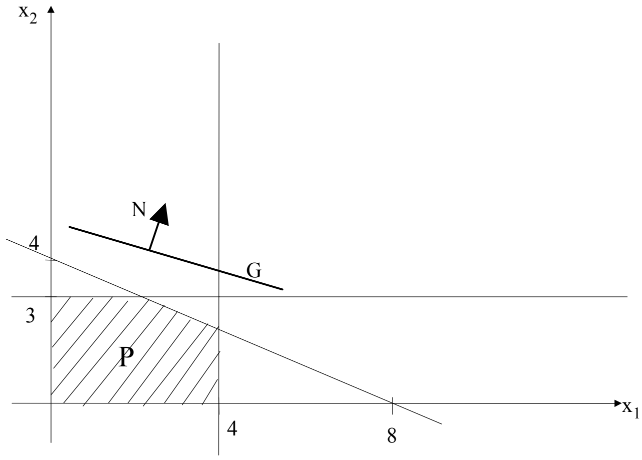
c^T = Zielfunktionskoeffizienten

b = Restriktionenverktor (= rechte Seite), $-d$: Fixkosten

1.2 Graphische Lösung

Es bietet sich zuerst eine graphische Lösung des Problems an, bei dem die jeweiligen Nebenbedingung bzw. Restriktionen als Geradengleichungen in einen Raum aufgefaßt werden.

- N: Normalenvektor der Zielfunktion (= Gradient der Zielfunktion)
- G: Gerade konstanten Gewinns
- P: zulässiger Bereich (= Polyeder) = Menge der zulässigen Produktionsprogramme



Die Kritik an der graphischen Lösung ist :

- die Beschränkung auf die Zweidimensionalität; Praxis-Probleme haben oft bis zu mehreren 100000 Variable, sowie bis zu 50-60% der Variablenanzahl als Restriktionen.

1.3 Algorithmische Lösung (Simplex-Algorithmus)

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der allgemeinen Lösung nach dem Simplex-Algorithmus ergibt sich wie folgt:

(1) Umwandlung in ein Problem mit Gleichungsrestriktionen durch Einführung von Schlupfvariabeln als Ausdruck von Maschinenleerkapazität

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + 5x_2 \\
&x_1 + x_3 = 4 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
&x_2 + x_5 = 3 \\
&x_i \geq 0 \ (i = 1,..,5)
\end{aligned}
$$

formal:

$x^{\sim} := (x,s)$ (s = Schlupfvariable)

$c^{\sim} := (c,0)$ (Zielfunktionskoeffizient)

$$\max z = c^{\sim T} x^{\sim}$$

$$(A,I)\, x^{\sim} = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}; c^{\sim}, x^{\sim} \in \mathbb{R}^{n+m}; b \in \mathbb{R}^{m}, \mathrm{I}: (m \times m) - \text{Einheitsmatrix}$$

$$x^{\sim} \geq 0.$$

(2) Tableauschreibweise (Interpretation des Gleichungssystems)

(T1)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b

x_3	1	0	1	0	0	0	4
x_4	1	2	0	1	0	0	8
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	3
Z	-2	-5	0	0	0	1	0

Die Basislösung ist x_1, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 3$ mit dem Wert für die Zielfunktion $z = 0$. Die Interpretation besagt, dass in diesem Fall nichts produziert wird und die Maschinen ihre gesamte Zeit als Leerzeit verbringen. Falls die rechte Seite $b \geq 0$ ist, spricht man von der **Zulässigkeit** der Lösung, da $x_i \geq 0$ für alle i. Formal ergibt sich das Tableau wie folgt:

$$T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$$

Interpretation der Basislösung:

1) $x_1 = x_2 = 0$: es wird nichts produziert.
Die eingeführten Schlupfvariable bezeichnen die Leerzeiten der Maschinen. Die Leerzeit der Maschine x_3 beträgt beispielsweise 4 ZE.

2) Man bestimme ein Produkt P_s (eine Variable x_s), dessen Produktion die Zielfunktion z erhöht. x_2 (s = 2) verspricht den größten Zuwachs von z. Man bestimme die Maschine r, die voll ausgelastet werden soll, somit also keine Leerzeit mehr hat. $a_{12}=0$ bedeutet, dass die Verweildauer von P_2 auf M_1 Null ist; P_2 trägt nichts zur Auslastung von M_1 bei. r = 1 ist also nicht sinnvoll.
$a_{22} = 2$, $b_2 = 8$; die Wahl r = 2 hätte zur Folge, dass $M_2 = 8/2 = 4$ Stück von P_2 fertigen soll. $x_2 = 4$ übersteigt jedoch die Kapazität von M_3, die maximal 3/1 Stück von P_2 fertigen kann. Folglich ergibt sich für die Zeilenwahl r=3. Gleichung (Restriktion) III limitiert in der gegebenen Situation die Ausbringungsmenge von P_2 am stärksten. Die Verwendung der Zeile 3 ist daher anzustreben; sie wird also zur Pivotzeile und $a_{32} = 1$ wird zum Pivotelement.

3) Umformung des Tableaus:
Man formuliere das Tableau (Gleichungssystem) so um, dass die Spalte s Einheitsspalte wird mit der 1 in Zeile r. (Pivotelement=a_{rs}). Dazu:
a) Dividieren der Zeile r durch das Pivotelement
b) Für jedes $i \neq r$, addieren des $-a_{is}$ -fachen der neuen Zeile r zur alten Zeile i
(i=1,..,m+1. Zeile m+1 entspricht der Zielfunktion)

(T2)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
x_3	1	0	1	0	0	0	4
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	-2	0	2
x_2	0	1	0	0	1	0	3
z	-2	0	0	0	5	1	15

Basislösung: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $z = 15$ (entspricht einer Ecke von P !)

4) Wiederholung von Schritt 2: Pivotelement: a_{21} ($s = 1$, $r = 2$)

(T3)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
x_3	0	0	1	-1	2	0	2
x_1	1	0	0	1	-2	0	2
x_2	0	1	0	0	1	0	3
z	0	0	0	2	1	1	19

Basislösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $z = 19$ entspricht einer Ecke von P !
Diese Basislösung entspricht der optimalen Lösung, da die Koeffizienten der Zielfunktion alle positive Vorzeichen haben, d.h. es lohnt sich nicht irgendeine der Variablen zu erhöhen. Das Tableau T3 ist das Optimaltableau.
Die extensionale Zielfunktion lautet:
$z = -2x_4 - x_5 + 19$

1.4 Allgemeine Anmerkungen

1) Die Basislösung sind Eckpunkte des Zulässigkeitspolyeders

2) Die Spalte mit z wird nie verändert. Sie kann deswegen entfallen

3) Die Voraussetzung muss sein, dass das Ausgangstableau **vollständig** (komplette Einheitsmatrix vorhanden) und **zulässig** (rechte Seite ≥ 0) ist.

4) Ausgehend von einer **zulässigen Basislösung** (rechte Seite ≥ 0) werden Gleichungsumformungen so ausgeführt, dass

   4.1) die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht beeinträchtigt wird (alle Umformungen sind invertierbar !)

   4.2) die Zulässigkeit (rechte Seite ≥ 0) erhalten bleibt

   4.3) der Zielfunktionswert z zumindest nicht abnimmt ($z_{alt} \leq z_{neu}$)

2. Allgemeines Verfahren (Simplex-Algorithmus)

(P)

max $c^T x + d$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}; c, x \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

(nach evtl. Einfügen von Schlupfvariablen gilt Ax = b mit ; A:=(A,I), x:=(x,s), c:=(c,0) (vgl. 1.3.1)); die Voraussetzungen aus 1.4.3) (s.o.) müssen beachtet werden)

Die vollständige Definition des Tableaus ergibt sich wie folgt:

$$T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$$

1. Bestimme Spaltenindex s, so dass $c_s := \max c_i$ (höchster lokaler Zuwachs von z).

   Falls an dieser Stelle $c_s \leq 0$ ist das Tableau bereits optimal → STOP.

   Denn $z := c_B^T x_B + c_N^T x_N + d$ nimmt sein Maximum bei z = d an ($c_B = 0$, $c_N \leq 0$; B = Index der Basisvariablen, N = Index der Nichtbasisvariablen)

Andernfalls (Tableau nicht optimal!):

2. Bestimme Zeilenindex r, so dass das Nachfolgetableau wieder zulässig ist.

$$\frac{b_r}{a_{rs}} := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}$$

Falls für alle i $a_{is} \leq 0$ gilt, dann existiert keine endliche Optimallösung → STOP.

3. Führe mit Pivot a_{rs} einen Gauß-Jordan Schritt durch. Das Ergebnistableau T' ist dann wieder vollständig (und zulässig).

$$x_B^{'} = \left\{ \begin{array}{l} x_B \text{ bis auf Zeile } r \\ x_s \text{ Komponente } r \text{ wird } x_s \end{array} \right\}$$

4. Setze T := T' und gehe zurück zu Schritt 1.

(S_1) Satz:

Ist beim geschilderten Verfahren $b_r > 0$ (bzw. $b_r = 0$); d.h. ist das Tableau T nicht entartet (bzw. entartet d.h. $b_r = 0$), dann gilt für den Zielfunktionswert d' des Nachfolgetableaus d' > d (bzw. im Entartungsfall d' = d).

(S_2) Satz:
Falls in einem Tableau T^* gilt $a_{is}^* \leq 0$ (vgl. die Zeilenwahl!) für alle i in Spalte s und gilt $c_s^* > 0$, dann hat (P) keine endliche Optimallösung.

Beweis:
T^* repräsentiert das Gleichungssystem $A^* x^* = b^*$.
Für jedes $t \geq 0$ hat T^* die Lösung x(t), definiert durch:

$x_i(t) := b_i - t\, a^*_{is}$, falls i Index einer Basisvariablen x_B ist, d.h. $i \in B$.
$x_s(t) := t \geq 0$
$x_i(t) := 0$ für $i \neq s$ und $i \in N$.
Wegen $b_i \geq 0$, $-t \leq 0$ und $a^*_{is} \leq 0$ gilt: $x(t) \geq 0$, x(t) ist zulässig.

$$A^* x(t) = \left(A_B^*\ A_N^*\right)\begin{bmatrix} x_B(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} = I \cdot x_B(t) + A_N^* x_N(t) = b^* - tA_s^* + A_s^* t = b^*$$

(dabei bezeichnet A_s^* die Spalte s von A^*).

Für die Zielfunktion gilt: $z = d^* + c_N x_N(t) = d^* + c_s t \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$

qed.

3. Endlichkeit des Simplex-Algorithmus

1. $T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$ sei ein vollständiges und zulässiges Tableau, A sei eine (m×n+m)-Matrix und $a_{rs} \neq 0$ sei Pivotelement (gemäß Punkt 2. des allgemeinen Verfahrens gilt sogar $a_{rs} > 0$)

   Den Übergang von $\begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} A' & b' \\ -c^{T'} & d' \end{pmatrix}$ gemäß der Vorschrift

1.1 Dividiere Zeile r durch das Pivotelement a_{rs}
1.2 Die Addition des $-a_{is}$-fachen der neuen Zeile r zur alten Zeile i, für alle $i \neq s$ haben wir als Gauß-Jordan Transformation bezeichnet.
Formal:

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ -c^{T'} & d' \end{pmatrix} := F_{rs} \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \text{ mit } F_{rs} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-a_{is}}{a_{rs}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \frac{1}{a_{rs}} & & & \\ & & & & \frac{-a_{is}}{a_{rs}} & 1 & & \\ \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & \frac{-c_s}{a_{rs}} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die Frobeniusmatrix F_{rs} ist invertierbar; sie ist bis auf die Spalte r identisch mit der Einheitsmatrix. In Zeile r steht der Quotient $\frac{1}{a_{rs}}$, in den Zeilen i, ($1 \le i \le m$, $i \ne r$) der Quotient $\frac{-a_{is}}{a_{rs}}$; in Zeile m+1 der Quotient $\frac{-c_s}{a_{rs}}$.

(S1) Satz:
Falls alle Tableaus, die im allgemeinen Verfahren (siehe 2.) auftreten, verschieden sind, bricht die reguläre Simplex-Methode nach endlichen vielen Schritten ab, entweder mit einem optimalen Tableau, oder mit der Auskunft, dass keine endliche Optimallösung existiert.
(Beweis, siehe Vorlesung.)

Sind also, wie in der Voraussetzung genannt, alle Tableaus verschieden (keine 2 gleichen Tableaus), dann gilt dies auch für die Basen. Es gibt nur endlich viele verschiedene Basen, so dass das Verfahren abbrechen muss.

2. Kreisen und Entarten

Ein Tableau T heißt entartet, wenn es ein i gibt, so dass $b_i = 0$. Geometrisch gesehen ist dann eine Ecke in $P \subset 3^n$ durch mehr als n Hyperebenen bestimmt (Überbestimmung, Entartung). Vgl. Gal (1987), S. 142.

Aus 2., Satz S1 folgt: Ist für jedes Tableau T die Komponente b_r der Pivotzeile $\ne 0$, wegen der vorausgesetzten Zulässigkeit also $b_r > 0$, dann gilt d' > d beim Übergang von T zu T'. Es treten somit nie gleiche Tableaus auf (siehe 3.3., Satz S1). Das Verfahren ist endlich. (siehe 3., Satz S1)
Umkehrung: Treten gleiche Tableaus auf, so muss bei einer Tableautransformation notwendigerweise $b_r = 0$ gelten. Man kann Fälle konstruieren, bei denen sich gleiche Tableaus wiederholen (vgl. Gal (1987, S. 147). Diese Situation nennt man "Kreisen". Kreisen setzt Entartung voraus.

Im Übergang $T \rightarrow T'$ mittels Gauß-Jordan Transformation kann T' nur entartet sein, wenn
a) T bereits entartet ist oder
b) in T bereits mehrere (≥ 2) gleichwertige Möglichkeiten vorhanden sind, die Pivotzeile zu bestimmen. (Überbestimmung der Ecke)
Mittels der lexikographischen Auswahlregel, die ergänzend hinzukommt (hier nicht weiter beschrieben), kann immer das Kreisen vermieden werden (ohne Beweis).

4. Die Phasen der Simplex-Methode (SM)

1. Ausgangspunkt: Lineares Optimierungsproblem.

   Formulierung mittels eines i.a. unvollständigen und unzulässigen Tableaus. Unvollständigkeit heißt: B ist nicht vollständig definiert (keine m verschiedenen Einheitsspalten). Unzulässigkeit heißt: In der rechten Seite b gibt es Komponenten kleiner 0.
2. Übergang in vollständiges Tableau
3. Übergang von vollständigem, aber unzulässigem Tableau in ein vollständiges und zulässiges Tableau (Phase I der Simplex-Methode)
4. Übergang in optimales Tableau durch reguläre (eventuell lexikographische) Simplex-Methode (Phase II der Simplex-Methode)

Kommerzielle Systeme zur linearen Optimierung verwenden in der Regel die lexikographische Auswahlregel. Man betrachtet bei ihr die Zeilen der Matrix (b,A).
Die Zeile i von (b,A) heißt lexikographisch negativ, ${}_{i}(b,A) \ll 0$, falls die erste von Null verschiedene Komponente von ${}_{i}(b,A)$ kleiner Null ist.
Die Zeile i von (b,A) heißt genau dann lexikographisch kleiner als die Zeile j von (b,A), d. h. ${}_{i}(b,A) \ll {}_{j}(a,A)$, wenn gilt: ${}_{i}(b,A) - {}_{j}(b,A) \ll 0$

Die Pivotzeile r wird, bei bereits determinierter Pivotspalte s, wie folgt gewählt:

$$\frac{{}_{r}(b,A)}{a_{rs}} := \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{{}_{i}(b,A)}{a_{is}} : a_{is} > 0\right\}$$

Beispiel zur Phase I der SM:

$$\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\
& 2x_1 - x_2 \le 5 \\
& x_2 + x_3 \ge 1 \\
& x_i \ge 0;\ i = 1,2,3
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b
*	1	2	-1	0	0	0	4
x_4	2	-1	0	1	0	0	5
x_5	0	-1	-1	0	1	0	-1
z	-3	1	-2	0	0	1	0

Das Tableau ist weder vollständig noch zulässig. Die Bestimmung eines vollständigen Tableaus läuft folgendermaßen ab:
Wählt man als Pivot-Zeile eine Zeile, bei der die korrespondierende Basisvariable nicht definiert ist (Vorkommen eines * in obiger Tableauschreibweise) und bestimmt innerhalb dieser Zeile ein beliebiges Element ≠ 0 als Pivotelement, dann führt ein Gauß-Jordan Schritt zu einem Tableau mit einer weiteren Basisvariable
⇒ Nach spätestens m Schritten erhält man ein vollständiges, i.A. nicht zulässiges Tableau.

Wählt man in Zeile 1 das erste Element ≠ 0 als Pivotelement (hier Spalte 1) so ergibt sich:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	-1	0	0	4
x_4	0	-5	2	1	0	-3
x_5	0	-1	-1	0	1	-1
Z	0	7	-5	0	0	12

Tableau vollständig, aber nicht zulässig

Beachte: Aus numerischen Gründen sollte man das betragsmäßig größte Element (≠0) als Pivotelement wählen. Der Grund dafür liegt in dem Sachverhalt, dass im Rechner eine Real-Zahl nicht exakt dargestellt wird, sondern wegen der endlichen Wortlänge auf einige signifikante Ziffern beschränkt werden muss.

Im Rahmen der Phase I der SM muss jetzt das vollständige, aber nicht zulässige Tableau in ein vollständiges und zulässiges Tableau umgewandelt werden (obiger Schritt 3).
Idee: Bislang erfolgte die Wahl des Pivotelements so, dass T' vollständig und zulässig und d' > d. Jetzt wird das Pivotelement so gewählt, dass die Zeilen von T, die zulässig sind, zulässig bleiben und für einen Index k, genannt Zielzeilenindex ($1 \le k \le m$, und $b_k < 0$), gilt: $b_k' > b_k$.

Verfahren:

Voraussetzung: $T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$ ist vollständig.

1. Bestimme Zielzeile k, mit $b_k < 0$ (bzw. $_k(b,A) \ll 0$ lexikographisch negativ). Falls ein solches k nicht existiert, STOP, T ist zulässig (bzw. lexikographisch positiv).
2. Bestimme in Zeile k einen Spaltenindex s, mit $a_{ks} := \min a_{kj}$. Falls $a_{ks} \ge 0$, dann existiert keine zulässige Lösung, STOP. Denn: $0 \le \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = b_k < 0$ 3
3. Bestimme Zeilenindex r, so dass
$\frac{b_r}{a_{rs}} := \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \text{ und } b_i \ge 0 \right\}$ falls es kein solches r gibt, setze r := k.
4. Gauß-Jordan Transformation mit Pivot a_{rs}. Falls $b_k < 0$, gehe zurück zu 2, ansonsten gehe zu 1.

Im Beispiel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_1	1	2	-1	0	0	4	
x_4	0	-5	2	1	0	-3	← Zielzeile k
x_5	0	-1	-1	0	1	-1	
z	0	7	-5	0	0	12	
		↑ s					

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	1/2	1	-1/2	0	0	2
x_4	5/2	0	-1/2	1	0	7
x_5	$\boxed{1/2}$	0	-3/2	0	1	1
z	-7/2	0	-3/2	0	0	-2

Tableau zulässig, Phase I der SM beendet

Phase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	1	0	-1	1
x_4	0	0	$\boxed{7}$	1	-5	2
x_1	1	0	-3	0	2	2
Z	0	0	-12	0	7	5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0	-1/7	-2/7	5/7
x_3	0	0	1	1/7	-5/7	2/7
x_1	1	0	0	3/7	-1/7	20/7
Z	0	0	0	12/7	-11/7	59/7

es existiert kein endliches Optimum

Andere Verfahren zur Phase I: M-Methode (= Strafkostenmethode)

Beispiel:

$$
\begin{array}{llr}
\max & 3x_1 + 2x_2 - x_3 & \\
& 3x_1 + x_2 \leq 25 & \text{(I)} \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 & \text{(II)} \\
& x_2 + 3x_3 = 20 & \text{(III)} \\
& -3x_1 + 3x_3 \leq -4 & \text{(IV)} \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 &
\end{array}
$$

1. Umformung der Ungleichung, so dass die rechte Seite im LP ≥ 0 ist. D. h. Multiplikation von (IV) mit (-1).
2. Einführung nicht negativer Schlupfvariablen für jede Ungleichung

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
& 3x_1 + x_2 + x_4 = 25 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\
& x_2 + 3x_3 = 20 \\
& 3x_1 - 3x_3 - x_5 = 4 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5
\end{array}
$$

zugehöriges $x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

3. Für jeden * in x_B wird eine künstliche Variable $z_i \geq 0$ eingeführt
4. Die z_i müssen möglichst schnell aus der Basis gebracht werden. Deswegen nimmt man sie mit den Strafkosten M >> 0 in die Zielfunktion auf

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - M(z_1 + z_2 + z_3)$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_4 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + z_1 &= 15 \\ x_2 + 3x_3 + z_2 &= 20 \\ -3x_1 + 3x_3 - x_5 + z_3 &= 4 \end{aligned}$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5;\quad z_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

Tableau: Die Zielfunktionskoeffizienten der Variablen z_j gehen mit umgekehrten Vorzeichen in eine zusätzliche Zielfunktion y ein. Diese wird die aus Sicht des Pivotisierens aktuelle Zielfunktion.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z_1	z_2	z_3	b
x_4	3	1	0	1	0	0	0	0	25
z_1	1	2	1	0	0	1	0	0	15
z_2	0	1	3	0	0	0	1	0	20
z_3	3	0	-3	0	-1	0	0	1	4
z	-3	-2	1	0	0	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	M	M	M	0

Vorbereitungsschritt: z_j sollen zunächst Basisvariable werden. An den Stellen mit Einheitsvektoren im Tableau müssen in der y-Zeile Nullen erzeugt werden. Man addiert das M-fache der Zeilen, in denen ein z_j vorkommt nach unten. Also: (y)-M·(IV), (y)-M·(III), (y)-M·(II)

Starttableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z_1	z_2	z_3	b
x_4	3	1	0	1	0	0	0	0	25
z_1	1	2	1	0	0	1	0	0	15
z_2	0	1	3	0	0	0	1	0	20
z_3	3	0	-3	0	-1	0	0	1	4
z	-3	-2	1	0	0	0	0	0	0
y	-4M	-3M	-M	0	M	0	0	0	-39M

Der Faktor M wird meist explizit mitgeführt. Über die Zielfunktionszeile y werden Simplexschritte durchgeführt. Beim Basistausch über die Zielfunktion y muss auch die Komponente der Zielfunktion z in der Spalte, in der ein Einheitsvektor erzeugt wird, zu 0 transformiert werden. Ist die Zielfunktion y optimal und es sind noch künstliche Variablen in der Basis, so existiert keine zulässige Lösung des LP. Sobald dagegen alle künstlichen Variablen aus der Basis entfernt wurden, hat man eine zulässige Lösung des Ausgangsproblems. Man streicht dann einfach die zusätzlichen Zeilen und Spalten weg und führt die Pivotschritte gegebenenfalls mit der Zielfunktionszeile z durch. Die M-Methode wird praktisch in jedem Lehrbuch beschrieben (vgl. z. B. Zimmermann (1987), S. 72ff). Der Nachteil der Methode besteht in der Aufblähung durch den Einsatz der künstlichen Variablen.

5. Umwandlungen in die Standardform

Standardform:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x + d \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

1. $Ax \leq b$ ("kanonische Form") $\rightarrow$ Einfügen von Schlupfvariablen!
2. Bei "$\geq$" -Restriktionen, d. h. $\Sigma a_{ij} \geq b_i$: Multiplikation mit -1. Ergebnis: $\Sigma(- a_{ij})\, x_j \leq - b_i$
3. Nichtvorzeichenbeschränkte Variable:

   Sei $x_k \in 3$ und somit im Vorzeichen unbeschränkt

   $\rightarrow$ Einführung neuer Variablen $x_k^{(1)} \geq 0$, $x_k^{(2)} \geq 0$ und Substitution $x_k := x_k^{(1)} - x_k^{(2)}$; d.h. die Spalte k im Tableau ist zu duplizieren und für $x_k^{(2)}$ im Vorzeichen umzukehren.
4. Minimierungsproblem: $\min z = c^T x + d \ \rightarrow\ - [\max - z := (-c_T)x - d]$ (Maximierung der negativen Zielfunktion!)
5. Untergrenzen der Variablen (lower bounds):

   $x_j \geq u_j \rightarrow$ neue Variable $x_j' := x_j - u_j \Leftrightarrow x_j = x_j' + u_j$; mit $x_j' \geq 0$. Entsprechend dieser Substitution muss die Zielfunktion und die rechte Seite umgeformt werden:

$$\begin{array}{lcl} \max \Sigma\, c_j\, x_j + d & & \Sigma\, c_j\, x_j' + \Sigma\, u_j\, c_j + d \\ \Sigma\, a_{ij}\, x_j \leq b_i & \rightarrow & \Sigma\, a_{ij}\, x_j' \leq b - \Sigma\, a_{ij}\, u_j \\ x_j \geq u_i\ \ j = 1..n & & x_j' \geq 0 \end{array}$$

6. Obergrenzen der Variablen (upper bounds):

   $x_j \leq o_j$, j = 1,..,n $\rightarrow$ Es gibt ein Verfahren (upper bounding technik), welches eine Lösung ohne Aufblähung des Tableaus gestattet (nicht behandelt). Obergrenzen können aber als "normale" Restriktion im LP erhalten bleiben.

6. Struktur der Simplex-Methode (Phase II)

1. Erzeugt wird eine Folge von Tableaus $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \ldots \rightarrow T_k \rightarrow \ldots \rightarrow T_l$ mit $k,l \in \angle$, T_l: Optimaltableau

$$T_k = \left[x_B^{(k)} \begin{pmatrix} A^{(k)} & b^{(k)} \\ -c^{(k)T} & d^{(k)} \end{pmatrix} \right], \ k \in \{0,..,n\}$$

2. Zusammenhang T_k mit T_{k-1} ($k \geq 1$):

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} & b^{(k)} \\ -c^{(k)T} & d^{(k)} \end{pmatrix} := F_{k-1} \begin{pmatrix} A^{(k-1)} & b^{(k-1)} \\ -c^{(k-1)T} & d^{(k-1)} \end{pmatrix}; \; F_{k-1} = \text{Frobeniusmatrix}$$

3. Zusammenhang T_k mit T_0:

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} & b^{(k)} \\ -c^{(k)T} & d^{(k)} \end{pmatrix} := F_{k-1} \cdot F_{k-2} \cdots F_0 \begin{pmatrix} A^{(0)} & b^{(0)} \\ -c^{(0)T} & d^{(0)} \end{pmatrix}$$

$G_{k-1} := F_{k-1} F_{k-2} \cdots F_0$ invertierbar

4. Struktur von G (Der Index bei G wird meist unterdrückt!):

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} & b^{(k)} \\ -c^{(k)T} & d^{(k)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ \pi^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(0)} & b^{(0)} \\ -c^{(0)T} & d^{(0)} \end{pmatrix}$$

G = $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ \pi^T & 1 \end{pmatrix}$. So wie die Matrix G sich bei jeder Tableautransformation ändert, so ändert sich auch B^{-1} und π^T

(Abhängigkeit vom Index k)

5. Ausmultipizieren liefert:

$A^{(k)} = B^{-1} A^{(0)}$, $b^{(k)} = B^{-1} b^{(0)}$

$-c^{(k)T} = \pi^T A^{(0)} - c^{(0)T}$ Dimensionen: $A^{(0)} \in \mathbb{R}^{m \times n+m}; B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}; \pi^T \in \mathbb{R}^m$

$d^{(k)} = \pi^T b^{(0)} + d^{(0)}$

Bei der revidierten SM wird $T^{(0)}$ gespeichert und in jedem Schritt setzt man $T := \left[x_B, G \cdot \begin{pmatrix} A^{(0)} & b^{(0)} \\ -c^{(0)T} & d^{(0)} \end{pmatrix} \right]$. Bei der Produktform der SM speichert man anstelle von G die Folge F_{k-1}, F_{k-2}, F_0 als Vektoren.

6. Beachte: $B^{-1} = \left(A^{(0)}_{B^{(k)}}\right)^{-1}$, (= die Inverse der Matrix, die aus $A^{(0)}$ gebildet wird, wenn nur die Spalten betrachtet werden, die in der aktuellen Basis $B^{(k)}$ sind; $k \in \{0,..,n\}$). Man nennt B^{-1} die Basisinverse.

7. Satz: $\pi^T = c^{(0)}_{B^{(k)}} \cdot B^{-1}$. Man erhält π durch Multiplikation der Komponenten der Zielfunktionszeile des Ausgangstableaus, die sich in der aktuellen Basis befinden, mit der Basisinversen.

8. Verdeutlichung:

8.0 max $c^T x + d$

$Ax \leq b, \quad b \geq 0, \quad b \in 3^m$

$x \geq 0; \qquad x \in ℜ^n$

Einführung von Schlupfvariablen ($x_{n+1}, ..., x_{n+m}$)

8.1 Starttableau:

	x_1 .... x_n	x_{n+1} ... x_{n+m}	
x_{n+1} ... x_{n+m}	A	I	b
z	$-c^T$	0	d

Nach k Gauß-Jordan Schritten folgt mit G = $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ \pi^T & 1 \end{pmatrix}$:

8.2

	x_1 .... x_n	x_{n+1} ... x_{n+m}	
x_B	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
z	$\pi^T A - c^T$	$\pi^T + 0 \cdot 1$	$\pi^T b + d$

9. Ökonomische Interpretation:

9.1 Zielfunktion: z = Periodendeckungsbeitrag, Dim = GE/ZE

9.2 x_j = Anzahl ME von Produkt P_j pro Periode, Dim = ME_j/ZE

9.3 $c_j^{(0)}$ = periodenbezogener Stückdeckungsbeitrag, Dim = GE/ME_j; $c_j^{(k)}$, k>0: "relativer Stückdeckungsbeitrag"

9.4 $d^{(0)} = -(-d^{(0)})$, $-d^{(0)}$ = periodenfixe Kosten, Dim = GE/ZE; $d^{(k)}$, k>0: aktueller Zielfunktionswert

9.5 gemäß (5) hat $-c_j^{(k)}$ die Struktur: $-c_j^{(k)} = K_j^{(k)} - c_j^{(0)}$; $K_j^{(k)} = (\pi^{(k)T} \cdot A^{(0)})_j$

9.5.1 Dimension $K_j^{(k)}$ wie von $c_j^{(0)}$ = GE/ME_j

9.5.2 Interpretation der $K_j^{(k)}$: Verdrängungskosten in der Basis (k). Um diese Verdrängungskosten vermindert sich der Wert der Zielfunktion, wenn die Variable j um eine Einheit erhöht wird. Die Verdrängungskosten bedeuten, dass die Erhöhung des Wertes einer Variablen die Verminderung einer anderen Variablen zur Folge hat.

9.5.3 Interpretation $c_j^{(0)}$: um diesen Wert erhöht sich die Zielfunktion, wenn die Variable j um eine Einheit erhöht wird.

9.5.4 Interpretation $c_j^{(k)}$:

a) $-c_j^{(k)} > 0$, d.h. $K_j^{(k)} > c_j^{(0)}$; die Verdrängungskosten der Variablen j in der k-ten Basis sind größer als der Wertzuwachs der Zielfunktion.

b) $-c_j^{(k)} < 0$, d.h. $K_j^{(k)} < c_j^{(0)}$; es lohnt, die Variable j zu erhöhen.

9.5.5 Bezeichnung der $c_j^{(k)}$: Opportunitätswert, Opportunitätskosten

9.6 Interpretation der a_{ij}: z.B. Inanspruchnahme der Maschine i, wenn eine ME von P_j produziert wird. Die Dimension $(a_{ij}) = Mh_i/ME_j$ (= ZE/ME). Mh_i = Maschinenstunde der Maschine i

9.7 $\Sigma\ a_{ij}\ x_j$ = Gesamtinanspruchnahme der Maschine i pro Periode beim Produktionsprogramm $x = (x_1,..,x_n)$. Dimension: $[Mh_i/ME_j]*[ME_j/\text{Periode}] = Mh_i/\text{Periode}$, bzw. Mh_i/ZE.

Interpretation von $b_i^{(0)}$: Kapazität von Maschine i pro Periode

9.8 Aus (5): $d^{(k)} = \pi^{(k)T}\ b^{(0)} + d^{(0)}$

9.8.1 Die Dimension $\pi_i^{(k)} = GE/Mh_i$

9.8.2 Interpretation $\pi_i^{(k)}$ = Kosten (= Preis) um die Maschine i eine ZE länger arbeiten zu lassen = "Schattenpreise".

$\pi_i^{(k)}$ = Maschinengrenzkosten (bei gewähltem Produktionsprogramm) $\rightarrow$ wertmäßiger Kostenbegriff (hängt ab von der Entscheidungssituation und der Zielvorstellung). Der Gegensatz hierzu ist der pagatorische Kostenbegriff.

9.8.3 Aus 8.2) ist in Verbindung mit 9.5.4) ersichtlich : Bei Erhöhung der Kapazität von Maschine i um eine Einheit nimmt der Wert der Zielfunktion um $\pi_i^{(k)} \cdot b_i$ zu.

Im Optimaltableau mit $x_{n+i}=0$ (d.h. Maschine i ist ausgelastet) kann x_{n+i} nur erhöht werden, wenn die Maschinenkapazität b_i erhöht werden kann (z.B. durch Vergabe von Produktionszeiten außer Haus). In diesem Fall und auch falls $x_{n+i} > 0$, also $\pi^{(l)}{}_i = 0$, gibt $\pi^{(l)}{}_i$ den Höchstpreis an, den unser Unternehmen dafür zu zahlen bereit ist.

Formal: $\pi^{(l)}$ ist folglich der Gradient Df der Funktion f(b):

$$
\begin{aligned}
f(b) := \max\ & c^T x \\
x:\ & Ax \le b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

7. Dualität

1. Der letzte Punkt (9.8.3) von Kap. 6 legt eine andere Entscheidungssituation nahe. Anstelle die Menge x bei gegebenen Maschinenkapazitäten b so zu bestimmen, dass der erzielte Deckungsbeitrag $z = c^T x + d_0$ maximal wird, läßt sich möglicherweise ein besseres Ergebnis erzielen, wenn die vorhandenen Maschinen an ein konkurrierendes Unternehmen vermietet werden ($\rightarrow$ vgl. Mineralölindustrie). Das Ergebnis der Vermietung wird wesentlich davon abhängen, welcher Preis $u = (u_1,..,u_m)^T$, Dim $u_i = GE/Mh_i$ pro Maschinenstunde Mh_i erzielbar ist.

2. Für die anstehenden Preisverhandlungen mit dem Konkurrenten ist es wichtig, die Grenzkosten pro Maschinenstunde (als Preisuntergrenze) zu kennen $\rightarrow$ wertmäßige Steuerung gegenüber der bisherigen mengenmäßigen Steuerung.
3. Diese Überlegungen führen zu folgendem Lösungsansatz: $u^T b + d_0$: Deckungsbeitrag pro Periode bei Vermietung der vorhandenen Maschinenkapazität.
   Zur Bestimmung einer Preisuntergrenze u' ist dieser zu minimieren.
   a_{ij}: Inanspruchnahme von Maschine i in Mh_i, um 1 ME von P_j zu fertigen. $[a_{ij}] = Mh_i/ME_j$.
   $u_i \cdot a_{ij}$: Alternativerlös, falls M_i vermietet wird
   $\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot a_{ij}$: Umsatz, der anstelle der Produktion einer Einheit von P_j durch Vermietung erzielt werden kann.
   Vermietung lohnt nur dann, falls $\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot a_{ij} \geq c_j$, j = 1,..,n und $u_i \geq 0$
4. Optimierungsproblem:
   (D) $\min u^T b + d_0$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}; c \in \mathbb{R}^n; u, b \in \mathbb{R}^m$
   $u^T A \geq c^T$
   $u \geq 0$

   Unser ursprüngliches Problem war:
   (P) $\max c^T x + d_0$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}; c, x \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m$
   $Ax \leq b$
   $x \geq 0$

   (P) und (D) heißen duale Probleme.
5. Beachte: Ist (P) ein Mengenproblem, dann ist (D) ein Wertproblem und umgekehrt. Wandelt man (D) in ein Maximierungsproblem mit $\leq$ Beziehung um, so kann man das zu (D) duale Problem bestimmen. Es gilt: das duale Problem zu (D) ist (P) und umgekehrt, das primale Problem zu (P) ist (D).
6. Beachte: In der Literatur wird meist $d_0 = 0$ angenommen. Dies ist zulässig, weil eine Konstante keinen Einfluß auf die Bestimmung eines optimalen x^* für (P) bzw. u^* für (D) hat.
7. Wiederholung: Lösbarkeit eines linearen Programmes:
   (P) $\max c^T x + d_0$
   $Ax \leq b$
   $x \geq 0$
   Alternativen bezüglich der Lösbarkeit von (P):
   (1) (P) hat keine zulässige Lösung, d.h. $M_p = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist leer.
   (2) (P) besitzt mindestens 1 Optimallösung
   (3) (P) besitzt keine beschränkte Optimallösung,

d.h. (P) $\sup c^T x + d_0 = +\infty$

$Ax \le b$

$x \ge 0$

7.1. Dualitätssatz der linearen Programmierung (Gale, Kuhn, Tucker)

(P) $\max c^T x + d_0$	(D) $\min u^T b + d_0$
$Ax \le b$	$u^T A \ge c^T$
$x \ge 0$	$u \ge 0$

1. Ist x zulässig für (P) und u zulässig für (D), dann gilt $c^T x \le u^T b$. Das Maximierungsproblem wird durch das Minimierungsproblem majorisiert.
2. Sei x zulässig für (P), u zulässig für (D) und $c^T x = u^T b \Leftrightarrow$ x ist optimal für (P) und u ist optimal für (D).
   Im Optimalfall liefert das Mengenproblem (P) den gleichen Wert wie das Wertproblem (D) !
3. Es tritt genau einer der folgenden Fälle auf:
   3.1) Es gibt keine zulässige Lösung für (P) und für (D).
   3.2) Es gibt keine zulässige Lösung für (P) und (D) hat keine endliche Optimallösung
   D. h.: $\inf b^T u = -\infty$

   $u^T A \ge c$

   $u \ge 0$

   3.3) es gibt keine zulässige Lösung für (D) und (P) hat keine endliche Optimallösung

   $\sup c^T x = +\infty$

   $Ax \le b$

   $x \ge 0$

   3.4) (P) hat eine zulässige Lösung und (D) hat eine zulässige Lösung. Dann gilt:
   (P) und (D) besitzen jeweils eine Optimallösung x^* bzw. u^* mit $c^T x^* = b^T u^*$.

7.2 Satz vom komplementären Schlupf

Ist $\bar{x}$ zulässig für (P) und $\bar{u}$ zulässig für (D), dann gilt:

$$\bar{x} \text{ und } \bar{u} \text{ sind optimal} \Leftrightarrow \bar{u}^T(A\bar{x} - b) = (\bar{u}^T A - c^T)\,\bar{x} = 0$$

Entsprechend gilt:

$$\bar{u}_i\,({}_iA\bar{x} - b_i) = 0 \text{ für } 1 \le i \le m \quad ({}_iA = \text{i-te Zeile von A})$$

$$(\bar{u}^T A_j - c_j)\,\bar{x}_j = 0 \text{ für } 1 \le j \le n \quad (A_j = \text{j-te Spalte von A})$$

Beweis:

$\bar{x}$ zulässig für (P) und $\bar{u}$ zulässig für (D) $\Rightarrow A\bar{x} \le b,\ \bar{x} \ge 0$ und $\bar{u}^T A \ge c,\ \bar{u} \ge 0 \Rightarrow \bar{u}^T A\bar{x} \le \bar{u}^T b$ und $\bar{u}^T A\bar{x} \ge c^T\bar{x}$.

Dualitätssatz: $\bar{x}, \bar{u}$ optimal $\Leftrightarrow c^T\bar{x} = \bar{u}^T A\bar{x} = \bar{u}^T b \Leftrightarrow \bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0$ und $(\bar{u}^T A - c^T)\,\bar{x} = 0$.

8. Die duale Simplex-Methode

Def: Das Tableau $T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$ heißt:

- primal zulässig, falls b ≥ 0
- dual zulässig, falls $-c^T \geq 0$
- optimal, falls T primal und dual zulässig.

8.1.1. Algorithmus zur dualen Simplex-Methode

Idee: Ausnutzen der Beziehung zwischen einer primalen Aufgabe und der ihr zugeordneten dualen Aufgabe:

Ausgangspunkt: LP mit max cTx, Ax≤b, x≥0, aber jetzt mit cT≤0, b80 (d. h. duale Zulässigkeit, primale Unzulässigkeit)

Ziel: Umformen des zugehörigen Tableaus, so dass in jedem Schritt die duale Zulässigkeit erhalten bleibt und letztlich die primale Zulässigkeit erreicht wird. Daraus folgt dann die Optimalität der Lösung.

1. Das Starttableau $T = \left[x_B \begin{pmatrix} A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix} \right]$ sei vollständig und dual zulässig ($-c^T \geq 0$), aber primal unzulässig (b80)
2. Bestimme Zeilenindex r, so dass $b_r := \min b_i$; $1 \leq i \leq m$. Falls $b_r \geq 0$, STOP, T ist primal (und dann auch dual) zulässig.
3. Bestimme Spaltenindex s, so dass $-c_s/a_{rs} = \max \{ -c_j/a_{rj} : a_{rj} < 0, 1 \leq j \leq m+n \}$.
   Falls $a_{rj} \geq 0$ für alle j, dann hat (P) wegen $0 \leq \sum a_{rj} x_j = b_r < 0$ ($x_j \geq 0$) keine zulässige Lösung, STOP
4. Führe Gauß-Jordan Schritt mit Pivot a_{rs} aus. Das neue Tableau $\overline{T}$ ist wieder dual zulässig, vollständig und es ist $\overline{d} \leq d$ (wegen Maximierung und c≤0). Setze $T := \overline{T}$ und gehe zurück zu Schritt 2.

Anwendungsfall (z. B. Diätproblem), A = (m x n)-Matrix, b, c ≥ 0:

Ausgangsproblem: min $b^T u + d$			$-[\max (-b^T) u] + d$	
$A^T u \geq c$	ℵ	⇔	$-A^T u \leq -c$	ℑ
$u \geq 0$			$u \geq 0$	

Das Problem ℑ weist die geeignete Struktur zur Anwendung der regulären Simplex-Methode auf. Problem: Rechte Seite 8 0, d. h. primale Unzulässigkeit Da aber mit -b≤0 im Tableau die duale Zulässigkeit erreicht wird, läßt sich der duale Simplex-Algorithmus anwenden.

9. Sensitivitäts-Analyse (Postoptimale Analysis)

Die Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich mit Auswirkungen von Änderungen der Ausgangsdaten auf die Optimallösung. Sie ist deshalb von besonderer Bedeutung, da die Konstanz der Ausgangsdaten, die bisher immer vorausgesetzt wurde, im allgemeinen nur begrenzt gegeben ist.

Beispiel: Ein Möbelfabrikant hat eine Produktpalette mit 4 Produkten, wobei diese auf zwei Maschinen gefertigt werden. Die zwei Maschinen unterliegen einer Mengenrestriktion. Die Produktionssituation wird durch das Tableau wiedergegeben.

Anfangstableau T_0:

(T_0)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	4	9	7	10	1	0	6
x_6	1	1	3	40	0	1	4
z	-12	-20	-18	-40	0	0	0

Optimaltableau: (Der nachfolgend genutzte Index l steht für Elemente des Optimaltableaus)

(T_{opt})	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	7/3	5/3	0	4/15	-1/15	4/3
x_4	0	-1/30	1/30	1	-1/150	2/75	1/15
z	0	20/3	10/3	0	44/15	4/15	56/3

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} & 0 \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} & 0 \\ \frac{44}{15} & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 1 & 40 & 0 \\ -12 & -40 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$ (direkt über T_0 und T_{opt} ablesbar, vgl. Kapitel 6)

Weiter gilt: $A^{(0)}_{B(l)} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 40 \end{pmatrix}$, $\pi^T = (-12,-40)$, $B^{-1} = \left(A^{(0)}_{B(l)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix}$, $\pi^T = c^{(0)}_{B(l)} \cdot B^{-1}$

B(l): Spaltenindizes der Spalten in der optimalen Basis

Übliche Informationen

Optimallösung: $x_1 = 4/3$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1/15$, $x_5 = x_6 = 0$ (Betrieb ist voll ausgelastet)

Duale Lösung: $u_1 = 44/15$, $u_2 = 4/15$

Gesamterlös (Zielfunktionswert) = 56/3 (GE)

1. Die Kapazitätsschranke b_1 sei nur ungenau bestimmt. Wie ändert sich der Gesamterlös, falls $b_1 \to b_1 \pm \mu_1$, μ_1 hinreichend klein.

   Allgemein: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \to b + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + \mu_1 \\ b_2 + \mu_2 \end{pmatrix}$

   1.1) Bekannt (6.9.8.3): $f(b) := \max c^T x$, Gradient von f, $Df = (u_1,u_2)^T$

   $Ax \leq b$

   $x \geq 0$

   folglich (vgl. 6.8.2: $z=f(b)=d^{(k)}= \pi^{(k)T}b + d^{(0)}$; hier: $\pi^{(l)T}=(u_1,u_2)=(44/15,\ 4/15)$ und $d^{(0)}=0$):

   $f(b + (\mu_1,\mu_2)) = f(b) + f((\mu_1,\mu_2))= (u_1,u_2)\cdot b + (u_1,u_2)\cdot (\mu_1,\mu_2)^T = f(b) + (u_1,u_2)(\mu_1,\mu_2)^T = z + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 56/3 + 44/15\mu_1 + 4/15\mu_2$

   Wie groß kann μ_1 bzw. μ_2 werden , damit diese Aussage Gültigkeit, d. h. die bisher berechnete Basis ihre Gültigkeit behält? Wann bleibt also das gegebene T_{opt} optimal?

   1.2) Ausführliche Argumentation: das Starttableau wird an der rechten Seite um eine weitere Spalte ergänzt.

Anfangstableau T_0

(T_0)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	+	μ
x_5	4	9	7	10	1	0	6	+	μ_1
x_6	1	1	3	40	0	1	4	+	μ_2
z	-12	-20	-18	-40	0	0	0		

Im Optimaltableau $T_{opt}=T_l$ errechnet sich diese Spalte über die Matrix G mittels (vgl. 6.8.2):

$$(b+\mu)^{(l)} = B^{-1}\cdot(b+\mu)^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6+\mu_1 \\ 4+\mu_2 \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich mit $\pi^{(l)T}b$ die Änderung der Zielfunktion: $56/3 \to 56/3 + 44/15\mu_1 + 4/15\mu_2$

Änderung des optimalen Produktionsprogramms:

$x_1 = 4/3 \ \to 4/3 \ + 4/15\mu_1 - 1/15\mu_2$

$x_4 = 1/15 \to 1/15 - 1/150\mu_1 + 2/75\mu_2$

Die optimale Lösung bleibt unverändert, falls für die rechte Seite $b + \mu \geq 0$ zutrifft, d. h.:

$4/3 \ + 4/15\mu_1 - 1/15\mu_2 \geq 0$

$1/15 - 1/150\mu_1 + 2/75\mu_2 \geq 0$

Wenn speziell $\mu_2 = 0$ und $\mu_1 = \mu'$, dann folgt:

$4/3 + 4/15\mu' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq -5$

$1/15 - 1/150\mu' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \leq 10$

Für alle μ mit $-5 \leq \mu \leq 10$ bleibt die bisherige Lösung optimal. D. h. die Kapazität der Maschine 1 kann im Bereich $[6-5 ; 6+10] = [1 ; 16]$ schwanken.

2) Lohnt es einen neuen Typ x_5 einzuführen, wenn ja, zu welchem Preis? Der Arbeitsbedarf wird durch den Vektor $(6,2)^T$ bezüglich der Maschinenrestriktion von M1 und M2 gegeben.
Der Preis betrage λ GE. Frage: Ab welcher Größe von λ lohnt sich der neue Typ?

T_0 erhält die zusätzliche Spalte: $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -\lambda \end{pmatrix}$

Im Endtableau wird daraus: $G\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ -c_5(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \frac{44}{15}\cdot 6 + \frac{8}{15} - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow -c_5(\lambda)=272/15 - \lambda$

Falls $-c_5(\lambda) \geq 0$, d.h. $\lambda \leq 272/15$ GE, lohnt sich die Einführung eines neuen Typs nicht, da die neue Optimallösung gleich der alten ist. Falls jedoch $\lambda > 272/15$, also $-c_5(\lambda) < 0$, dann ist das Tableau nicht optimal. Ein weiterer Gauß-Jordan Schritt bringt x_5 in die neue Basis unter Erhöhung des Gesamterlöses.

3) Wie stark kann sich der Preis c_1 vom Produkt 1 verändern, ohne die Optimallösung und damit die Angebotspalette zu ändern?

$c^T = (12, 20 ,18, 40) \rightarrow c(\mu)^T = c^T + (\mu, 0, 0, 0), \mu \in 3$

Die korrespondieren Änderungen der Zielfunktionszeile im Optimaltableau:

$z(x) = c^T x \rightarrow c^T x + (\mu, 0, 0 ,0)\, x := z_\mu(x)$

Die aktualisierten Werte der Zielfunktionszeile in T_{opt} erhält man, indem man die x_1-Zeile von T_{opt} mit μ gewichtet und zur bisherigen Zielfunktionszeile von T_{opt} hinzuaddiert.

Begründung am Beispiel der x2-Spalte: Die Verdrängungskosten bei Produktion von P2 ergeben sich ursprünglich aus $(7/3)\cdot 12-(1/30)\cdot 40-20=(20/3)$. Wegen der Modifikation des Deckungsbeitrages vo nP1 ergibt sich nun: $(7/3)\cdot(12+\mu)-(1/30)\cdot 40-20=(20/3)+(7/3)\cdot\mu$.

(T_{opt})	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	7/3	5/3	0	4/15	-1/15	4/3
x_4	0	-1/30	1/30	1	-1/150	2/75	1/15
z	0	20/3	10/3	0	44/15	4/15	56/3
+	0	7/3µ	5/3µ	0	4/15µ	-1/15µ	4/3µ

Die Optimalbasis ändert sich nicht, falls die Komponenten von $z_\mu(x) \geq 0$ sind, d.h. falls alle nachfolgenden Bedingungen gelten:

$20/3 + 7/3\mu \geq 0$

$10/3 + 5/3\mu \geq 0$

$44/15 + 4/15\mu \geq 0$

$4/15 - 1/15\mu \geq 0$

d.h. falls $-2 \leq \mu \leq 4$. Gesamterlös (in Abhängigkeit von µ): $56/3 + 4/3\mu$

D. h. die Optimalbasis ändert sich erst, wenn der Deckungsbeitrag von P1 um mehr als 2 GE sinkt, oder um mehr als 4 GE steigt.

IV. Transport- und Zuordnungsprobleme

1. Transportprobleme

Gegeben:
Quellen (Produktionsstätten) A_i mit den Angebotsmengen in ME , wobei $a_i \geq 0$, i = 1,..,p.

Senken (Nachfragestellen, Lager) B_j mit Nachfrage b_j in ME, wobei $b_j \geq 0$, j = 1,..,q.

$c_{ij} \geq 0$: Transportkosten pro ME von A_i nach B_j, i = 1,..,p; j = 1,..,q

$x_{ij} \geq 0$: Transportmengen in ME von A_i nach B_j, i = 1,..,p; j = 1,..,q

Gesucht:
Transportplan, d. h. $x^T = (x_{11},..,x_{1q}, x_{21},..,x_{2q},..,x_{p1},..,x_{pq})$, der den gesamten Output ($= \sum a_i$) zu den Nachfragestätten schafft unter Befriedigung der Gesamtnachfrage ($= \sum b_j$) und Minimierung der Transportkosten.

1) Bedingung: Gesamtoutput = Gesamtnachfrage; $\sum a_i = \sum b_j$

2) Falls $\sum a_i > \sum b_j$, dann führe man ein zusätzliches fiktives Lager B_{q+1} ein, mit der Nachfrage $b_{q+1} := \sum a_i - \sum b_j$, und den Transportkosten $c_{i,q+1} = 0$ für i=1,...,p

3) Falls $\sum a_i < \sum b_j$, dann führe man zusätzlich einen fiktiven Anbieter A_{p+1} mit der Angebotsmenge

$a_{p+1} = \Sigma\, b_j - \Sigma\, a_i$ und den Transportkosten $c_{p+1,j} := 0$, j=1,..,q ein. Ohne Einschränkungen gelte im folgenden die Bedingung 1).

4) Das Transportproblem als LP: min $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} c_{ij}x_{ij}$, so dass:

$\sum_j x_{ij} = a_i$ (die gesamte von A_i abtransportierte Menge muss gleich der Produktionsmenge a_i in A_i sein, $1 \leq i \leq p$).

$\sum_i x_{ij} = b_j$ (die gesamte nach B_j transportierte Menge muss gleich der Nachfragemenge b_j in B_j sein, $1 \leq j \leq q$);

$x_{ij} \geq 0 \;\; \forall$ i, j

Wegen $\sum_i a_i = \sum_i\sum_j x_{ij} = \sum_j\sum_i x_{ij} = \sum_j b_j$ ist 1) erfüllt.

5) Struktur des Tableaus T, gemäß 4):

x_{11}	...	x_{1q}	x_{21}	...	x_{2q}	....	x_{p1}	...	x_{pq}	
1	...	1	0	...	0		0	...	0	a_1
			1	...	1	....				a_2
	0			0				0		⋮
							1	...	1	a_p
1		0	1		0		1		0	b_1
	⋱			⋱		....		⋱		⋮
0		1	0		1		0		1	b_q

Wegen $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ und der Struktur der Matrix in 5) gilt, dass die letzte Zeile linear abhängig von den übrigen ist. Man kann sie streichen. Bezeichnet A die (reduzierte) Problemmatrix, dann gilt $rg(A) \leq p + q - 1$.

Man kann zeigen: $rg(A) = p + q - 1$, d. h. jede Basislösung von T besitzt höchstens p+q-1 positive Elemente.

6) Satz: Unter der Voraussetzung 1) gilt, dass T eine Optimallösung hat.

Beweis: Setze $s := \Sigma a_i$ $(=\Sigma b_j)$

1) $x_{ij} = (a_i \cdot b_j)/s$ ist eine zulässige Lösung, denn

1.1) $x_{ij} \geq 0$, wegen $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $s \geq 0$ für alle i und j

1.2) $\sum_j x_{ij} = (\Sigma b_j)\cdot a_i/s = a_i$ für alle i

$\sum_i x_{ij} = (\Sigma a_i)\cdot b_j/s = b_j$ für alle j

2) Wegen $0 \leq x_{ij} \leq a_i$ ist der zulässige Bereich beschränkt. Eine unbeschränkte Optimallösung kann es nicht geben

3) Aus der LP-Theorie folgt die Existenz einer Optimallösung.

7) Lösung des Transportproblems

Phase I der Simplex-Methode heißt eine erste zulässige Basis zu bestimmen.

Vorgehensweisen: a) rhythmisches Hinschauen (= Ausprobieren)

b) Nord-West-Ecken-Methode (NWE)

Die Matrix der Transportkosten c_{ij} von der Produktionsstätte i zur Nachfragestelle j sei wie folgt gegeben:

c_{ij}=

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3	4	3	0
a_2	2	3	3	2
a_3	6	7	4	2

7.1) Beispiel 1 (Nord-West-Ecken-Regel).

In der Mengenmatrix werden die Mengen x_{ij} manuell so festgelegt, dass eine zulässige Lösung des Problems erreicht wird.

	b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_i		3	6	8	$2+3\mu$
a_1	$5+\mu$	3	$2+\mu$		
a_2	$6+\mu$		$4-\mu$	$2+2\mu$	
a_3	$8+\mu$			$6-2\mu$	$2+3\mu$

Basisvariablen:

$x_{11} = 3$, $x_{12} = 2$

$x_{22} = 4$, $x_{23} = 2$

$x_{33} = 6$, $x_{34} = 2$

NWE-Regel: Man startet links oben und bewegt sich nach rechts unten, wobei die Angebotsmengen a_i und/oder die Bedarfsmengen b_j voll ausgeschöpft bzw. befriedigt werden. Man beginnt von den Entscheidungsvariablen x_{ij} mit dem Element x_{11} der Transportmengenmatrix und belegt es mit der maximal zulässigen Menge. Entweder gilt $x_{11}=b_1$ (wenn $b_1 \leq a_1$), oder $x_{11}=a_1$ (wenn $a_1 \geq b_1$). Ist $x_{11}=b_1$ (das ist in unserem Beispiel der Fall), wird der Index j um eins erhöht und man geht über zur Variablen x_{12}, die mit der maximal zulässigen Menge belegt wird. Ist hingegen $x_{11}=a_1$, wird der Index i um eins erhöht und die Variable x_{21} mit der maximal zulässigen Menge belegt. Diese Vorgehensweise wird fortgesetzt, bis die Summe der den Variablen zugewiesenen Mengen gleich der gesamten Transportmenge ist. Man beginnt also in dem Feld i=1 und j=1 mit x_{11} der Transportmengenmatrix (=Nord-West-Ecke) und führt die Mengenzuweisung foortschreitend bis zum Feld i=m und j=n mit x_{mn} der Transportmengenmatrix (=Süd-Ost-Ecke) durch. Zur Bedeutung von μ siehe Punkt 7.3). Hier kann μ=0 gesetzt werden.

7.2) Beispiel 2.

	b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_i		1	6	2	3
a_1	1	1	0		
a_2	6		6		
a_3	5		0	2	3

Beachte:

$x_{12} = x_{32} = 0$, obwohl x_{12} und x_{32} in der Basis sind.

⇒**Entartung**

7.3) Ein Entartung kann vermieden werden durch eine künstliche Angebotserhöhung um $\mu > 0$, $\mu << 1$

	b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_i		1	6	2	$3+3\mu$
a_1	$1+\mu$	1	μ		
a_2	$6+\mu$		$6-\mu$	2μ	
a_3	$5+\mu$			$2-2\mu$	$3+3\mu$

7.4) Phase II (u-v-Methode)

Struktur der Simplexmethode: $\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{g} \\ +\overline{c}^T & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\pi^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & g \\ +c^T & d \end{pmatrix}$

Die Vorzeichenänderung in der letzten Zeile, $+c^T$ und $-\pi^T$, ist darauf zurückzuführen, dass es sich hier um ein Minimierungsproblem handelt.

Setzt man: (A,g) := reduziertes Problem (ohne letzte Zeile !), so lautet $g^T = (a_1,..., a_p, b_1, ..., b_{q-1})$

7.5) Folglich:

$\overline{c}^T = -\pi^T A + c^T$

Die Komponenten von π sind im Vorzeichen nicht beschränkt.

Setzt man

$\pi^T := (u_1, u_2,..., u_p, v_1,...,v_{q-1})$ und ergänzt π^T durch $v_q = 0$, so folgt aus 7.5) und der speziellen Struktur der Matrix A im Transportproblem (vgl. 5):

7.6) $\overline{c}_{ij} = -u_i - v_j + c_{ij}$ für alle i und j, $v_q = 0$

Bedenkt man, dass $\overline{c}_{ij} = 0$ falls x_{ij} in der aktuellen Basis, so kann 7.6) nach u_i und v_j aufgelöst werden.

7) Optimalitätskriterium:

$\overline{c}_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}$ für alle i und j.

Zum Beispiel (1): Transportkostenmatrix und Transportmengenmatrix (Startlösung gemäß NWE-Regel):

$c_{ij}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3	4	3	0
a_2	2	3	3	2
a_3	6	7	4	2

	b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_i		3	6	8	$2+3\mu$
a_1	$5+\mu$	3	$2+\mu$		
a_2	$6+\mu$		$4-\mu$	$2+2\mu$	
a_3	$8+\mu$			$6-2\mu$	$2+3\mu$

Für die besetzten Felder der aktuellen Transportmengenmatrix (zulässige Lösung, entsprechende x_{ij} sind in der Basis, für die zugehörigen $\bar{c}_{ij}$ gilt $\bar{c}_{ij}=0$) legt man in der sog. u-v-Kostenmatrix u-Werte für die Zeilen und v-Werte für die Spalten so fest, dass der Bedingung $c_{ij}=u_i+v_j$ (vgl. 7.6)) genügt wird. Dies ist in der nachfolgenden Tabelle so erfolgt. (Die inneren Elemente der Matrix stellen die bekannten Kostenkoeffizienten dar.)

$u_i \backslash v_j$	1	2	2	0(=v_q)
2	**3**	**4**	3	0
1	2	**3**	**3**	2
2	6	7	**4**	**2**

fett: Zugehöriges x_{ij} ist Basisvariable

Hiervon ausgehend berechnet man mittels 7.6) die aktuellen $\bar{c}_{ij}$ Werte und überprüft dann über 7) die Optimalität der aktuellen Lösung.

$\overset{\text{mit(7.6)}}{\Rightarrow} \quad \bar{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht optimal. Negative Koeffizienten bei den Opportunitätskosten $\bar{c}_{ij}$ geben an, um wieviel sich die Transportkosten vermindern, wenn die zugehörige Nichtbasisvariable xij mit einer Einheit belegt wird.

In die neue Basis kommt das x_{ij}, das dem kleinsten $\bar{c}_{ij}$ entspricht (wie in der Simplex-Methode); hier: x_{14}.

Schritt 2: Bestimmung eines neuen Transportplans.

Setze $x_{14}=\theta$. In der gleichen Zeile wird dann ein belegtes Feld um θ vermindert. Hier $x_{12}=2+\mu-\theta$. Dies realisiert die Zulässigkeit dieser “Zeilengleichung”. Anschließend muss ein belegtes Feld dieser Spalte um θ erhöht werden (hier $x_{22}=4-\mu+\theta$). Die notwendigen Korrekturen erzeugen einen geschlossenen Weg. θ ist anschließend so groß zu bestimmen, wie das kleinste Eckelement des geschlossenen Weges, von dem θ abgezogen wird (Nichtnegativitätsbedingung). An die Stelle dieses Eckelementes tritt ein freies Feld, d. h. die Variable wird zur Nichtbasisvariable. Hier: $\theta=2+\mu$.

Die alte Basislösung ist: $\begin{pmatrix} 3 & 2+\mu-\theta & 0 & \theta \\ 0 & 4-\mu+\theta & 2+2\mu-\theta & 0 \\ 0 & 0 & 6-2\mu+\theta & 2+3\mu-\theta \end{pmatrix}$

Der neue Transportplan (Transportmengenmatrix) erhält die folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2+\mu \\ 0 & 6 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 8-\mu & 2\mu \end{pmatrix}$

Wiederholung der bisher beschriebenen Schritte:

$u_i \backslash v_j$	3	2	2	0(=v_q)
0	**<u>3</u>**	4	3	**<u>0</u>**
1	2	**<u>3</u>**	**<u>3</u>**	2
2	6	7	**<u>4</u>**	**<u>2</u>**

$$\overline{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung ist nicht optimal, da in $\overline{c}_{ij}$ negative Werte vorkommen.

Wiederholung des letzten Schrittes: In die neue Basis kommt x_{21}; damit erhält der neue Transportplan zunächst die Gestalt (θ ist zunächst unbestimmt!):

$$\begin{pmatrix} 3-\theta & 0 & 0 & 2+\mu+\theta \\ 0+\theta & 6 & \mu-\theta & 0 \\ 0 & 0 & 8-\mu+\theta & 2\mu-\theta \end{pmatrix}$$

$\theta := \mu$ leistet das Gewünschte! (Basistransformation an entarteter Ecke !)

Neuer Transportplan: $\begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 & 2+2\mu \\ \mu & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \mu \end{pmatrix}$

$u_i \backslash v_j$	3	4	2	0
0	**<u>3</u>**	4	3	**<u>0</u>**
1	**<u>2</u>**	**<u>3</u>**	3	2
2	6	7	**<u>4</u>**	**<u>2</u>**

$$\overline{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung ist optimal, da in $\bar{c}_{ij}$ alle Komponenten ≥ 0.

Zugehörige Basislösung: $x_{11} = 3-\mu$, $x_{14} = 2+2\mu$, $x_{21} = \mu$, $x_{22} = 6$, $x_{33} = 8$, $x_{34} = \mu$, $x_{ij} = 0$ sonst.

Für $\mu = 0$ erhält man:

$x_{11} = 3$, $x_{14} = 2$, $x_{22} = 6$, $x_{33} = 8$, $x_{ij} = 0$ sonst.

Transportkosten = $3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 9 + 18 + 32 = 59$

Beachte:

1) Die u-v-Methode ist eine auf die spezielle Struktur von Transportproblemen zugeschnittene Form der Simplex-Methode.s
2) NWE-Regel und u-v-Methode benutzen nur Addition und Subtraktion.

Folglich: geringe Rechenzeit und Rundungsfehler.

Sind die Produktions- und Nachfragemengen ganze Zahlen, dann ist jede Basislösung und insbesondere der optimale Transportplan ganzzahlig.

2. Zuordnungsprobleme

Setzt man speziell: $p = q$ und $a_i = b_j = 1$ für alle i und j, dann erhält man ein sogenanntes Zuordnungsproblem.

Beispiel:

n Arbeiter $A_1, \ldots, A_n$

n Arbeitsplätze $P_1, \ldots, P_n$

e_{ij} = Effizienz von A_i an P_j; $1 \le i,j \le n$

Problem: Bestimme eine eineindeutige Zuordnung der A_i zu den P_j, so dass die Gesamteffizienz maximal wird.

Lösungsansatz: x_{ij} = Bruchteil der Zeit, die A_i am Platz P_j verbringt.

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_{ij}$$

$\sum_j x_{ij} = 1$ für $1 \le i \le n$. "Jeder Arbeiter muss die ganze Zeit arbeiten".

$\sum_i x_{ij} = 1$ für $1 \le j \le n$. "An jedem Arbeitsplatz wird die ganze Zeit gearbeitet".

$x_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i, j$

Das Verfahren garantiert die Ganzzahligkeit der x_{ij}, d.h.:

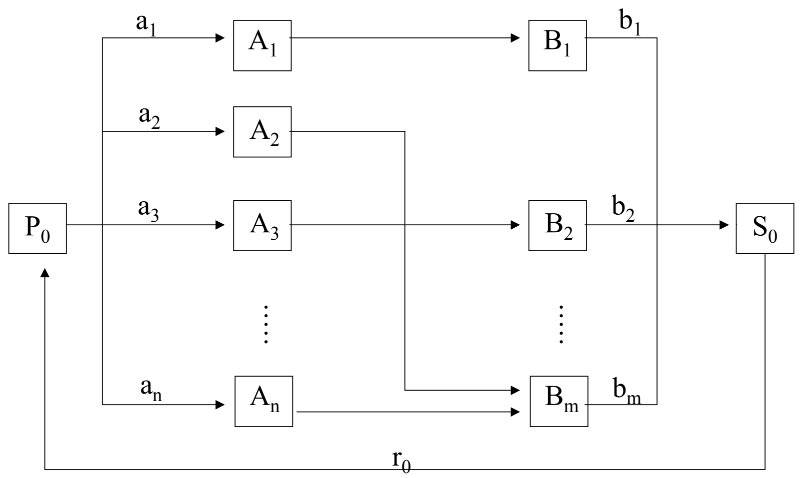
$x_{ij} = 0$: Arbeiter i wird nicht am Platz P_j eingesetzt.

$x_{ij} = 1$: Arbeiter i wird am Platz P_j eingesetzt.

3. Strömungsprobleme

3.1.1. Darstellung als Strömungsproblem

Transport- bzw. Zuordnungsprobleme lassen sich auch als Strömungsproblem darstellen. Dazu werden die Angebotsorte A_i (i = 1,...,n) und die Nachfragestätten B_j (j= 1,..,m) als Knoten eines endlichen Graphen dargestellt.



Wenn es möglich ist, das Gut von A_i nach B_j zu transportieren, so wird ein entsprechender gerichteter Pfeil (A_i, B_j) vorgesehen mit einer unbeschränkten Kapazität.

Der Graph wird ergänzt durch eine gemeinsame Quelle P_0 und eine gemeinsame Senke S_0. Von P_0 wird zu jeder Angebotsstätte A_i ein Pfeil (P_0,A_i) mit Pfeilkapazitäten $a_1,...,a_n$ eingezeichnet. Entsprechendes gilt von jeder Nachfragestätte B_j zu der gemeinsamen Senke S_0. Die Pfeilkapazitäten entsprechen hier gerade den nachgefragten Mengen $b_1,...,b_m$.

Zusätzlich wird ein fiktiver Pfeil $r_0 := (S_0,P_0)$ eingerichtet.

Man stelle sich vor, dass in dem so beschriebenen Netzwerk eine Flüssigkeit zirkuliert, d.h. im Pfeil r_0 befindet sich eine Pumpe, die eine maximale Strömung erzeugt.

Allgemein: Für Knoten K_i, K_j eines gerichteten Graphen G, $[K_i, K_j \in \{A_1,...,A_n\} \cup \{B_1,...,B_m\} \cup \{S_0,P_0\}]$, die durch einen Pfeil (K_i,K_j) verbunden sind, bezeichne x_{ij} die Strömung durch die "gerichtete Kante" (K_i,K_j), d.h. die Anzahl Mengeneinheiten die von K_i nach K_j fließen.

Die Strömungsbedingungen lauten:

$\sum_{l} x_{li} = \sum_{l} x_{il}$ (Zufluß in K_i ist gleich dem Abfluß aus K_i).

Definition:

Eine Strömung x: = $\{x_{ij} \in 3$: (K_i,K_j) ist Pfeil in G$\}$

heißt zulässig bezüglich θ und G ($\theta := \{\theta_{ij} \in 3$: (K_i,K_j) ist Pfeil in G mit der Kapazität $\theta_{ij}\}$), falls $0 \leq x_{ij} \leq \theta_{ij}$.

θ determiniert somit die Höchstkapazität für Flüsse über die Kanten in G.

Das Transportproblem läßt sich in zwei Schritten als spezielles Strömungsproblem lösen, nämlich:
1) Bestimme eine (bezüglich G und θ) maximale zulässige Strömung x.

2) Hinsichtlich der Kostenbewertung

C := $\{c_{ij} \in 3$: (K_i,K_j) ist Pfeil in G mit Transportkosten c_{ij} pro ME$\}$;

finde eine kostenminimale, maximale (und zulässige) Strömung in G.

3.1.2. Bestimmung einer maximalen Strömung

Zulässige Ausgangsströmung?, z.B. $x_{ij}= 0$ für Pfeile (K_i,K_j)

Markierungsalgorithmus (Edmunds u. Karp, Fifo-Markierung):

Graph G mit Knotenmenge K und Kantenmenge U sowie einer Kapazitätsbewertung der Kanten M:U→3 sei endlich, ohne parallele Pfeile. x = (x_{ij}) sei zulässige Ausgangsströmung. Ziel: Der Fluß durch r_0 und damit die Strömung von P_0 und S_0 muss maximal werden. Die Kapazitäten der Pfeile (K_i,K_j) seien mit μ_{ij} bezeichnet.

1) Markiere P_0 mit der zusätzlichen maximal auslieferbaren Menge: $[+,S_0,\ \mu_{00} - x_{00}]$ (eventuell $\mu_{00} = \infty$). Die Interpretation ergibt, dass von S_0 aus zusätzlich ("+") μ_{00}-x_{00} ME nach P_0 transportiert werden können, hier P_0 [+,s, ∞].

2) K_i sei markiert; für alle K_j, K_j nicht markiert und K_j Nachfolger von K_i und $x_{ij} < \mu_{ij}$ (wenn also der Fluß durch den Pfeil um $\varepsilon_j > 0$ erhöht werden kann) markiere K_j mit der zusätzlichen Menge ε_j, die maximal zusätzlich von K_i nach K_j kommen kann. ε_j errechnet sich wie folgt: $\varepsilon_j := \min \{\varepsilon_i,\ \mu_{ij} - x_{ij}\}$. ε_i ist dabei die Maximalmenge, die in K_i zusätzlich angeliefert werden kann. μ_{ij}-x_{ij} ist die momentane Restkapazität des Pfeiles (K_i,K_j). Die Markierung in K_j ist somit: $[+,K_i,\ \varepsilon_j]$.

3) Für alle K_j, wobei K_j nicht markiert, K_j Vorgänger von K_i ($\neq S_0$) und $x_{ji} > 0$ und $\varepsilon_i > 0$ [d. h. der Fluß durch den Pfeil (K_j,K_i) kann reduziert werden, weil die Strömungsbedingung durch Ausgleich über ε_i-Zusatzfluß erfüllt bleiben]. Markiere K_j mit $[-,K_i,\ \varepsilon_j]$, $\varepsilon_j := \min \{\varepsilon_i,\ x_{ji}\}$. Wiederhole den Schritt 2) und 3) solange, bis eine der Abbruchbedingungen 4) oder 5) erreicht ist.

4) Falls S_0 markiert ist, STOP; der Fluß durch den Pfeil (S_0,P_0) kann um den Wert ε_{S_0} erhöht werden. Rekonstruiere mittels der Markierung den Weg rückwärts, auf dem der Fluß um ε_{S_0} verändert werden kann.

5) Ist S_0 nicht markierbar, STOP; x_{ij} ist maximal.

Beispiel in der Vorlesung.

a) Kostenminimale Strömungen

Problem: Der Graph G mit der Knotenmenge $K = \{K_1, .. ,K_n\}$ und der Kantenmenge $U \subseteq K \times K$ ist gegeben. Der Einfachheit halber sei angenommen: G hat weder parallele Pfeile noch Schleifen. Jeder Pfeil $(K_i,K_j) \in U$ habe eine Bewertung $(\mu_{ij}, x_{ij}, c_{ij})$ = (Kapazität, Fluß, Kosten). Es existieren zwei augezeichnete Knoten P_0 und S_0 und ein Pfeil $r_0 = (S_0,P_0)$ ohne parallelen Pfeil.

Gesucht: zu dem gegebenen Strömungswert w durch r_0 bestimmte man die Strömung $x = (x_{ij})$, so dass diese kostenminimal ist, d.h. $\Sigma c_{ij}x_{ij} \rightarrow$ Min.!

b) Kostenminimale maximale Strömung

Bestimme zuerst eine maximale Strömung und damit den Strömungswert w.

Erzeuge dann den Inkrementengraph I (Zuwachsgraph) über den gegebenenfalls eine Verringerung der aktuellen Gesamtkosten hergeleitet werden kann.

Als Hilfsmittel wird ausgehend von G der Inkrementgraph I benötigt, der pro Pfeil die marginalen Kosten bei zulässigen Strömungsänderungen ausgibt. Die Eckmenge von I ist gleich K; die Pfeilmenge von I sei $E = U_1 \cup U_2$ mit:

$U_1 := \{ (K_i,K_j) \in U : x_{ij} < \mu_{ij}$ und $[x_{ji} = 0$ falls $(K_j,K_i) \in U]\} - \{(S_0,P_0)\}$

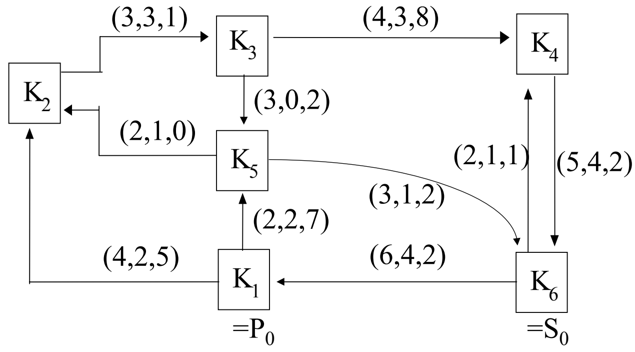
$U_2 := \{ (K_j,K_i): (K_i,K_j) \in U$ und $x_{ij} > 0\} - \{(S_0,P_0)\}$

Pfeilbewertung von I: k: E→3 mit:

$$k(K_i, K_j) = \begin{cases} c_{ij}, \text{falls } (K_i, K_j) \in U_1 \\ -c_{ij}, \text{falls } (K_i, K_j) \in U_2 \end{cases}$$

Findet man im Inkrementgraph einen beliebigen Kreis mit negativer Gesamtlänge (berechnet über die Kantengewichte), so lassen sich die Kosten für den Fluß w reduzieren.

Beispiel:



Pfeilbewertung (μ_0, x_{ij}, c_{ij}) = (Kapazität, Fluß, Kosten)

Gesucht: kostenminimales zulässiges x^* mit $x_{61}^* = 4$

Die Erstellung des Inkrementengraph I zeigt: Dem Kreis $Z_1 = [S_0,K_4,S_0]$ in I entspricht in G ein Zyklus mit der Kostenlänge $k(Z_1) = -3$. Frage: Wie und um wieviel läßt sich der aktuelle Strom kostenmäßig verbessern?

Dazu:

$x^{(1)}$:= maximale Änderung der Strömung längs Z_1. Diese ergibt sich aus:

$\varepsilon(Z_1)$:= Strömungswert von Z_1:= min (4-0,1-0) = 1. Allgemein: $\min \{\{\mu_{ij}-x_{ij}: (K_i, K_j)\in U_1 \cap Z_1\}, \{ x_{ij}: (K_j, K_i)\in U_2 \cap Z_1\}\}$

Der Strömungswert gibt die Veränderung des tatsächlichen Flusses an.

Nach dem ersten Schritt gilt somit in G: $x_{ij}^{neu} = \begin{cases} x_{ij}^{alt} + \varepsilon(Z_1), \text{falls } (K_i, K_j) \in Z_1 \\ x_{ij}^{alt} - \varepsilon(Z_1), \text{falls } (K_j, K_i) \in Z_1 \end{cases}$

Als Gesamtersparnis ergibt sich mithin: $\Delta k(Z_1) := \varepsilon(Z_1)\, k(Z_1) = -3$

Analog durchgeführte Schritte ergeben im weiteren für das obige Beispiel:

$Z_2 = [P_0,K_2,K_5,P_0]$, $k(Z_2) = -2$, $x^{(2)}$ = Änderung der Strömung längs Z_2

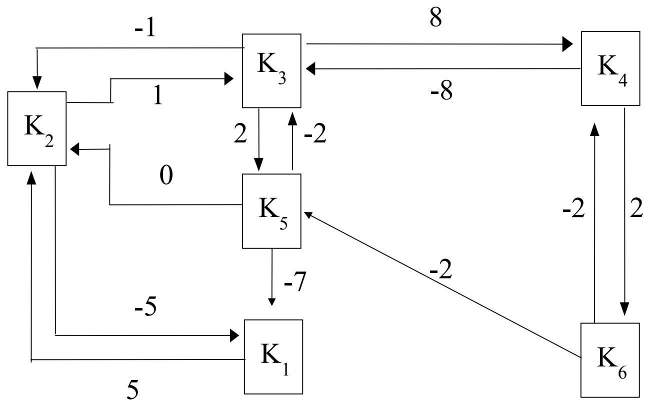
$\varepsilon(Z_2)$ = min (4-2,1-0,2-0) = 1, $\Delta k(Z_2) := \varepsilon(Z_2)\, k(Z_2) = -2$

$Z_3 = [S_0,K_4,K_3,K_2,K_1,K_5,S_0]$, $k(Z_3) = -7$, $\varepsilon(Z_3) = 1$, $\Delta k(Z_3) = -7$

$Z_4 = [S_0,K_4,K_3,K_5,S_0]$, $k(Z_4) = -6$, $\varepsilon(Z_4) = 1$, $\Delta k(Z_4) = -6$

Damit ergibt sich zusammenfassend: $x^* := x + x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \ldots x^{(4)}$ ("Überlagerung")

Hieraus resultiert dann der nachfolgende Inkrementgraph. Ergebnis: Es existiert kein Kreis negativer Kostenlänge. x^* ist eine kostenminimale Strömung.



V. Nichtlineare Optimierungsprobleme und mehrfache Ziele

1. Mehrfache Ziele

In der Regel werden in einem Entscheidungsproblem mehrere Zielgrößen verfolgt. Man unterscheidet hierbei anspruchsniveaubezogene und extremwertbezogenen Ziele.

1.1.1. Anspruchsniveaubezogene Ziele mit Muss-Charakter

Diese Ziele haben einen "Muss"-Charakter und werden in Art eines Restriktionensystems abgebildet. Die Unterscheidung wird getroffen zwischen Zulässigkeit und Unzulässigkeit der gefundenen Lösung.

1.1.2. Anspruchsniveaubezogene Ziele mit Soll-Charakter

Falls alle Ziele erfüllbar sind, ergibt sich ein Restriktionensystem ohne Konfliktsituation und damit eigentlich kein eigentliches Entscheidungsproblem. Falls nicht alle Ziele erfüllbar sind, existiert eine konfliktionäre Situation. Ansetzen kann man an Vorgehensweisen/Strategien, die die Reduktion der Höhe des Anspruchsniveaus versuchen. Zum Beispiel ergibt sich bei n anspruchsviveaubezogene Ziele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Anordnung nach Wichtigkeit $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_n$

1.1.3. Berücksichtigung mehrerer extremwertbezogener Ziele

Hier entsteht in der Regel eine Konfliktsituation, d.h. das Mehr eines Ziels geht zu Lasten mindestens eines anderen Ziels.

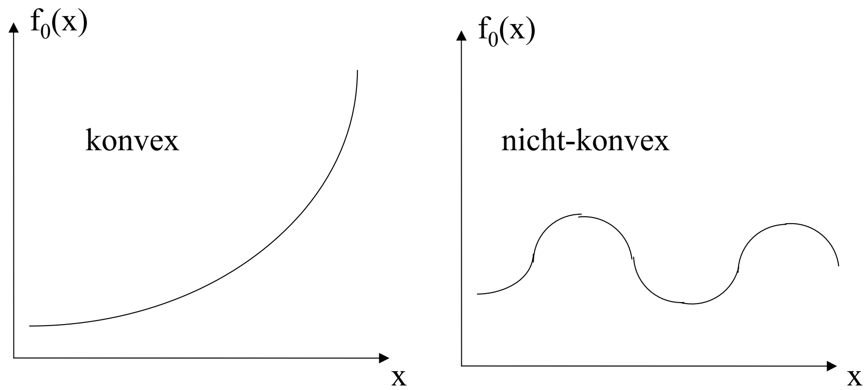
2. Diskrete Optimierungsprobleme

Unter diesem Begriff wird die gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung verstanden. Hier wird verlangt, dass bei Entscheidungsproblemen gewisse Variable nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Je nachdem, ob alle Variable als ganzzahlig definiert sind oder nicht, unterscheidet man zwischen rein-ganzzahligen Linearen Programmen oder gemischt-ganzzahligen Linearen Programmen. Die Forderung nach Ganzzahligkeit ist auf die nicht beliebige Teilbarkeit der Variable (Menschen, Gebäude, u.a.) zurückzuführen. Das besprochene Simplex-Verfahren reicht nicht aus, da bei dieser Methode von einem konvexen Lösungsraum ausgegangen wird; eine Eigenschaft, die ganzzahlige Lösungsräume nicht haben. Mögliche Lösungsmethoden sind:

- Schnittebenen-Verfahren vom Gomory
- Branch and Bound-Verfahren
- vollständige Emulation

3. Konvexe Optimierungsprobleme

Die nicht lineare Programmierung beschäftigt sich mit der Bestimmung optimaler Lösungen bei Modellen, bei denen mindestens eine Zielfunktion oder Nebenbedingung eine nicht lineare Funktion ist. Konvexität ist erforderlich, damit ein lokales Optimum auch ein globales Optimum ist. Als Beispiel sollen folgende zwei Funktionsverläufe dienen.



Konvexität von $f_0(x)$ und $f_i(x)$ umfaßt auch die Forderung, dass die jeweiligen Definitionsbereiche konvex sind. Dies gilt dann auch für den Zulässigkeitsbereich C, $C := \{x \in 3^n : x \in \bigcap_i \mathrm{Def}(f_i) \cap \mathrm{Def}(f_0)$ und $f_i(x) \leq 0,\ i=1,\ldots,n\}$.

Konvexität einer Menge C bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zweier Punkte aus C in C liegt. Die aus der Linearen Programmierung bekannte Dualitätstheorie läßt sich auf den nicht-lineraren Programmierungsfall nur übertragen, wenn besondere Bedingungen des Restriktionensystems, sogenannte "Constraint Qualifications", erfüllt sind. Die Ergebnisse der Dualitätstheorie sind im Satz von Kuhn und Tucker zusammengefaßt, der die Äquivalenz einer optimalen Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen mit der Existenz eines Gleichgewichtspunktes der zugehörigen Lagrangefunktion zum Gegenstand hat.

Speziell: $f_0(x)$ quadratische konvexe Funktion (Parabel)
$f_i(x)$, $1 \le i \le n$ lineare Funktionen
$\Rightarrow$ Quadratisches Optimierungsproblem

Da die Ableitung von $f_0(x)$, $Df_0(x)$, eine lineare Funktion ist, erlaubt der Satz von Kuhn und Tucker die Bestimmung einer optimalen Lösung quadratischer Optimierungsprobleme durch Rückführung der linearen Techniken (vgl. die Verfahren von Wolfe, Beale, usw.). Nichtlineare Problemstellungen, die eine Linearisierung nicht zulassen -dies gilt auch für die "Dynamische Optimierung"- haben in den Wirtschaftswissenschaften bislang keine praktische Relevanz.

VI. Literaturangaben

Bamberg, G.; Coenenberg, A. G.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre. 9. Aufl., München, Vahlen, 1996.

Bitz, M.: Entscheidungstheorie. Vahlen, München 1981.

Gal, T.: Grundlagen des Operations-Research, Berlin [u.a.], Springer, 1987.

Krelle, W.: Präferenz- und Entscheidungstheorie. Mohr, Tübingen, 1968.

Laux, H: Entscheidungstheorie, 4., neubearb. und erw. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 1998.

Müller-Merbach, H: Operations Research. 3.Auflage, 8. Nachdr., Vahlen, München 1985.

Noltemeier, H.: Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen. Berlin, New York 1976.

Runzheimer, B.: Lineare Planungsrechnung und Netzplantechnik. Operations Research I, Gabler, 1995.

Schneeweiß, H.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Springer, Berlin [u.a.], 1967.

Zimmermann, H.-J.: Methoden und Modelle des Operations Research. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1987