Fernau/Raible
Sommersemester 2007
Universität Trier

Theoretische Informatik Trier

Übungen zur Vorlesung

Automaten und Formale Sprachen

Aufgabenblatt 5

Abgabe der Ausarbeitungen: MO, 02.07.2006, spätestens 14.00 Uhr

Wo? Fächer beschriftet mit "Automaten und Formale Sprachen"
in der Mitte der vierten Etage vor H426

Aufgabe 1 (Kellerautomaten 1)

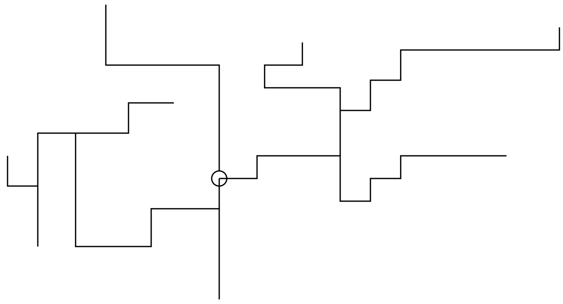
1. (6 Punkte)
   Wir betrachten eine etwas 'altertümliche', einfache Zeichenmaschine. Diese besitzt einen Schreibkopf, der bei jeder Bewegung auf das Papier zeichnet und sich auch nicht anheben lässt. Nach dem Schreibvorgang muss der Kopf an seine Ausgangsposition zurückgeführt werden und er darf ebenfalls diese Position nach seiner Rückkehr nicht verlassen. Die Rückkehr zur Ausgangsposition über Kreiswege ist nicht möglich, der Kopf muss also immer die bereits gezeichnete Linie zurückverfolgen. Der Schreibkopf lässt sich in 4 Richtungen bewegen: o, u, l, r (respektive oben, unten, links, rechts). Die Richtungen o, u und l, r sind jeweils konträr: $\overline{u} = o, \overline{o} = u, \overline{l} = r, \overline{r} = l$.
   Entwerfen Sie einen nicht-deterministischen Kellerautomaten A, der die '1-Spur-Sprache' erkennt, diese ist

   $$L = \{w \in \{o, u, l, r\}^* \mid w = x_1 x_2 \dots x_n \overline{x_n} \dots \overline{x_2}\, \overline{x_1}\}$$

2. (6 Punkte)
   Beweisen Sie: $L = L(A)$.
   ($L \subseteq L(A)$ mit Induktion nach Wortlänge, $L(A) \subseteq L$ mit Induktion nach Länge der Ableitung).

3. (4 Punkte)
   Der Automat aus 1) liegt nun in der Version 2.0 vor. Als neues Feature darf er nun zusätzlich auch nach jeder Rückkehr zum Ausgangspunkt diesen wieder verlassen.
   Entwerfen Sie einen nicht-deterministischen Kellerautomaten, der nun in

der Lage ist auch 'Verästelungen' zu erkennen, also Bilder wie das Folgende:



Hinweis:

Bei einem (nicht-deterministischen) Kellerautomaten gilt folgendes:
$\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$ (Siehe Vorlesung).
Bei einem deterministischen Kellerautomaten ist Δ eine Funktion (vgl. DEA und NEA): $\Delta : (Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma^*) \to (Q \times \Gamma^*)$.
Pro Zustand, Eingabe und Kellerzeichen gibt es also immer höchstens eine Nachfolgekonfiguration.

Aufgabe 2 (Kellerautomaten 2)(3 + 4 Punkte)

1. Geben Sie einen <u>deterministischen</u> Kellerautomaten an, der die Sprache $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ in w sind genau soviele a'a wie b's.$\}$ erkennt.
2. Geben Sie einen <u>deterministischen</u> Kellerautomaten an, der die Sprache $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ in w sind doppelt soviel a'a wie b's.$\}$ erkennt.

Aufgabe 3 (kontextfreie Grammatik 2)(4 + 2 + 3 +5 Punkte)
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgenden Sprache an:

1. $L_1 = \{w_1 w_2 \dots w_n \in \{0, 1, \dots, 9, .\}^* \mid w_1 w_2 \dots w_n$ ist Dezimalbruch ohne unnötige 0 $\}$
   Der Punkt '.' stellt das Dezimaltrennzeichen dar.
2. $L_2 = \{w \in \{(,)\}^* \mid w$ ist ein korrekt geklammerter Ausdruck$\}$, also $(())() \in L_2$.
3. Sei $L_3 = \{w \in \{[,]\}^* \mid w$ ist ein korrekt geklammerter Ausdruck$\}$. Gib für $(L_2 \cup L_3)^*$ eine Grammatik an.
4. $L_4 = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, w$ hat genau soviele a's wie b's$\}$
   Hierzu eine Hilfestellung: Jedes $w \in L_4$ lässt sich wie folgt partitionieren:
   $w = a_1 \dots a_n$ mit folgenden Eigenschaften bzgl. der a_i

(a) In a_i sind gleich viele a's wie b's.

(b) In keinen Präfix von a_i sind gleich viele a's wie b's

Ebenso gibt es 2 Arten von a_i. diejenigen die mit a beginnen, nennen wir Sie a_i^a, und diejenigen die mit b beginnen, also a_i^b. Hier zu ein Beispiel für $aabbabbabbaa$:

$$\begin{array}{cccc} \overset{>}{a}\overset{>}{a}\overset{>}{b}\overset{=}{b} & \overset{>}{a}\overset{=}{b} & \overset{<}{b}\overset{=}{a} & \overset{<}{b}\overset{<}{b}\overset{<}{a}\overset{=}{a} \\ a_1^a & a_2^a & a_3^b & a_4^b \end{array}$$

Hierbei geben die Zeichen $>, <, =$ an, ob a in der Mehrheit ist, in der Minderheit ist oder gleich viele a's wie b's im Präfix, das durch die jeweilige Position definiert ist, sind. Nutzeen Sie eine Reinterpretation von $(,), [,]$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $\Gamma = (\{S, T\}, \{0, 1\}, \delta, S)$ wobei δ durch folgende Produktionen ist:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0S11 | T \\ T & \rightarrow & 0T0 | 1T1 | 00 \end{array}$$

1. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der $L(\Gamma)$ erkennt und mit leerem Keller akzeptiert.

2. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der bei Erreichen eines Endzustandes akzeptiert und das Kellerbodenzeichen $\triangleleft$ besitzt.

Aufgabe 5
(5 + 1 Punkte)
Gegeben sei der Kellerautomat mit nachfolgender Überführungsfunktion:

$$\begin{array}{lcl} ((z_0, a, \triangleleft) & , & (z_0, A\triangleleft)) \\ ((z_0, b, \triangleleft) & , & (z_0, B\triangleleft)) \\ ((z_0, a, A) & , & (z_0, AA)) \\ ((z_0, b, A) & , & (z_0, \epsilon)) \\ ((z_0, a, B) & , & (z_0, \epsilon)) \\ ((z_0, b, B) & , & (z_0, BB)) \\ ((z_0, \epsilon, \triangleleft) & , & (z_0, \epsilon)) \end{array}$$

1. Konstruieren Sie die zu obigem Kellerautomaten gehörige kontextfreie Grammatik.

2. Geben Sie eine Linksableitung für das Wort $aabbba$ an.