3 *Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen*

Kann man die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit als vollständig betrachten? (1935)

In einer vollständigen Theorie gibt es zu jedem Element der Realität stets ein entsprechendes Element. Eine hinreichende Bedingung für die Realität einer physikalischen Größe ist die Möglichkeit, sie mit Sicherheit vorherzusagen, ohne das System zu stören. In der Quantenmechanik schließt im Falle von zwei physikalischen Größen, die durch nicht-kommutierende Operatoren beschrieben werden, das Wissen von der einen das Wissen von der anderen aus. Dann ist entweder (1) die Beschreibung der Realität, die durch die Wellenfunktion in der Quantenmechanik gegeben wird, nicht vollständig oder (2) diesen beiden Größen kann nicht gleichzeitig Realität zukommen. Die Betrachtung des Problems, Vorhersagen bezüglich eines Systems auf der Grundlage von Messungen zu machen, die an einem anderen System, das zuvor mit dem ersteren in Wechselwirkung stand, ausgeführt wurden, führen auf das Ergebnis, daß wenn (1) falsch ist, dann auch (2) falsch ist. Man wird so zu dem Schluß geführt, daß die Beschreibung der Realität, wie sie von der Wellenfunktion geleistet wird, nicht vollständig ist.

1.

Jede ernsthafte Betrachtung einer physikalischen Theorie muß dem Unterschied zwischen objektiver Realität, die unabhängig von der Theorie ist, und den physikalischen Begriffen, mit denen die Theorie arbeitet, Rechnung tragen. Diese Begriffe sind dazu bestimmt, der objektiven Realität zu entsprechen, und mit Hilfe dieser Begriffe machen wir uns Vorstellungen von dieser Realität.

Um zu versuchen, den Erfolg einer physikalischen Theorie zu beurteilen, können wir uns zwei Fragen vorlegen:

(1) „Ist die Theorie korrekt?" und (2) „Ist die von der Theorie geleistete Beschreibung vollständig?"

Nur wenn beide Fragen positiv beantwortet werden können, kann die Theorie als befriedigend bezeichnet werden. Die Korrektheit der Theorie wird aus dem Grad der Übereinstimmung zwischen den Schlußfolgerungen der Theorie und der menschlichen Erfahrung beurteilt. Diese Erfahrung, die uns allein befähigt, auf die Wirklichkeit zu schließen, nimmt in der Physik die Gestalt von Experiment und Messung an. Der zweiten Frage wollen wir hier in bezug auf die Quantenmechanik nachgehen.

Welche Bedeutung man auch immer dem Ausdruck *vollständig* beimißt, folgende Forderung an eine vollständige Theorie scheint unumgänglich zu sein: *jedes Element der physikalischen Realität muß seine Entsprechung in der physikalischen Theorie haben.* Wir werden dies die Bedingung der Vollständigkeit nennen. Die zweite Frage ist daher leicht beantwortet, sobald wir in der Lage sind zu entscheiden, welches die Elemente der physikalischen Realität sind.

Die Elemente der physikalischen Realität können nicht durch *a priori* philosophische Überlegungen bestimmt, sondern müssen durch Berufung auf Ergebnisse von Experimenten und Messungen gefunden werden. Eine umfassende Definition von Realität jedoch ist für unser Ziel unnötig. Wir werden uns mit dem folgenden Kriterium begnügen, das wir für vernünftig halten. *Wenn wir, ohne auf irgendeine Weise ein System zu stören, den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit (d.h. mit der Wahrscheinlichkeit gleich eins) vorhersagen können, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser physikalischen Größe entspricht.* Obzwar dieses Kriterium bei weitem nicht alle Möglichkeiten, eine physikalische Realität zu betrachten, ausschöpft, scheint es uns zumindest eine solche Möglichkeit zu bieten, wenn die in ihm festgelegten Bedingungen eintreten. Nicht als notwendige, sondern nur als hinreichende Bedingung betrachtet, steht dieses Kriterium im Einklang sowohl mit den klassischen als auch mit den quantenmechanischen Realitätsvorstellungen.

Um solche Vorstellungen zu veranschaulichen, wollen wir die quantenmechanische Beschreibung des Verhaltens eines Teilchens mit einem einzigen Freiheitsgrad betrachten. Der grundlegende Begriff der Theorie ist der Begriff des Zustands, dessen vollständige Kennzeichnung durch die Wellenfunktion ψ angenommen wird, die eine Funktion der zur Beschreibung des Verhaltens des Teilchens gewählten Variablen ist. Entsprechend jeder physikalisch observablen Größe A gibt es einen Operator, den man mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen kann.

Wenn ψ eine Eigenfunktion des Operators A ist, d.h. wenn

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \tag{1}$$

wobei a eine Zahl ist, dann hat die physikalische Größe A mit Sicherheit den Wert a, wenn sich das Teilchen in dem durch ψ gegebenen Zustand befindet. In Übereinstimmung mit unserem Realitätskriterium gibt es für ein Teilchen, das sich in dem durch ψ gemäß Gleichung (1) gegebenen Zustand befindet, ein Element der physikalischen Realität, das der physikalischen Größe A entspricht. Es sei z.B.

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \tag{2}$$

wobei h die Plancksche Konstante, p_0 eine konstante Zahl und x die unabhängige Variable ist. Da der Operator, der dem Impuls des Teilchens entspricht,

$$p = \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

ist, erhalten wir

$$\psi' = p\psi = \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = p_0\psi. \tag{4}$$

Daher hat in dem durch Gleichung (2) gegebenen Zustand der Impuls des Teilchens sicher den Wert p_0. Es ist daher sinnvoll zu sagen, daß der Impuls des Teilchens in dem durch Gleichung (2) gegebenen Zustand real ist.

Wenn andererseits Gleichung (1) nicht gilt, können wir nicht mehr sagen, daß der physikalischen Größe A ein besonderer Wert zukommt. Das ist z.B. für die Koordinate des Teilchens der Fall. Der Operator, der ihr entspricht, sagen wir q, ist der Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Variablen.

Daher gilt

$$q\,\psi = x\,\psi \neq a\,\psi. \tag{5}$$

Im Einklang mit der Quantenmechanik können wir nur sagen, daß die relative Wahrscheinlichkeit, daß eine Messung der Koordinate einen Wert zwischen a und b ergibt, gegeben ist durch

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\,\psi\,dx = \int_a^b dx = b - a. \tag{6}$$

Da diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von a ist und nur von der Differenz $b - a$ abhängt, sehen wir, daß alle Werte der Koordinate gleich wahrscheinlich sind.

Ein bestimmter Wert der Koordinate läßt sich daher für ein Teilchen, das sich in einem durch Gleichung (2) gegebenen Zustand befindet, nicht vorhersagen, sondern kann nur durch eine direkte Messung gewonnen werden. Solch eine Messung aber stört das Teilchen und ändert damit seinen Zustand. Nachdem die Koordinate bestimmt ist, befindet sich das Teilchen nicht mehr in dem durch Gleichung (2) gegebenen Zustand. Daraus wird in der Quantenmechanik üblicherweise geschlossen, *daß der Koordinate des Teilchens, sobald dessen Impuls bekannt ist, keine physikalische Realität zukommt.*

Allgemeiner wird in der Quantenmechanik gezeigt, daß in dem Fall, in dem die den beiden physikalischen Größen, sagen wir A und B, entsprechenden Operatoren nicht miteinander kommutieren, d.h. $AB \neq BA$, die genaue Kenntnis des einen von ihnen eine solche Kenntnis des anderen ausschließt. Darüber hinaus wird jeder Versuch, den letzteren experimentell zu

bestimmen, den Zustand des Systems auf solche Weise verändern, daß die Kenntnis vom ersteren zerstört wird.

Daraus ergibt sich, daß entweder (1) *die quantenmechanische Beschreibung der Realität, wie sie durch die Wellenfunktion gegeben ist, nicht vollständig ist* oder (2), *wenn die den beiden physikalischen Größen entsprechenden Operatoren nicht miteinander kommutieren, den beiden Größen nicht zugleich Realität zukommt.* Wären nämlich beide Größen zugleich real – und hätten damit bestimmte Werte –, so gingen diese Werte in die vollständige Beschreibung ein, wie es die Vollständigkeitsbedingung verlangt. Würde die Wellenfunktion dann eine solche vollständige Beschreibung der Realität leisten, so würde sie diese Werte enthalten; diese wären dann vorhersagbar. Da dies nicht der Fall ist, verbleiben uns nur die genannten Alternativen.

In der Quantenmechanik wird üblicherweise angenommen, daß die Wellenfunktion tatsächlich eine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität des Systems in dem Zustand, dem sie entspricht, beinhaltet. Auf den ersten Blick erscheint diese Annahme als völlig vernünftig, da die aus der Wellenfunktion erhältliche Information genau dem zu entsprechen scheint, was ohne Änderung des Zustands des Systems gemessen werden kann. Wir werden jedoch zeigen, daß diese Annahme zusammen mit dem oben formulierten Realitätskriterium zu einem Widerspruch führt.

2.

Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, daß zwei Systeme, I und II, vorliegen, die von der Zeit $t = 0$ bis $t = T$ miteinander wechselwirken mögen, danach aber keinerlei Wechselwirkung mehr zwischen den beiden Teilen herrscht. Wir nehmen ferner an, daß die Zustände der beiden Systeme vor $t = 0$ bekannt waren. Wir können dann mit Hilfe der Schrödingergleichung den Zustand des kombinierten Systems I + II zu jeder folgenden Zeit berechnen, insbesondere für jedes $t > T$. Die entsprechende Wellenfunktion sei mit ψ bezeichnet.

Wir können jedoch nicht den Zustand berechnen, in dem sich eines der beiden Systeme nach der Wechselwirkung befindet. Entsprechend der Quantenmechanik kann dies nur gestützt auf weitere Messungen getan werden und zwar in einem Vorgang, der als *Reduktion* des Wellenpakets bekannt ist. Wir wollen nun diesen Vorgang in seinen wesentlichen Zügen betrachten.

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Eigenwerte einer physikalischen Größe A, die zu dem System I gehört, und $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1) \ldots$ die entsprechenden Eigenfunktionen, wobei x_1 für die Variablen steht, die zur Beschreibung des ersten Systems verwendet werden. Dann kann ψ, betrachtet als eine Funktion von x_1, ausgedrückt werden als

$$\psi(x_1 x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\, u_n(x_1), \tag{7}$$

wobei x_2 für die Variablen steht, die zur Beschreibung des zweiten Systems verwendet werden. Hier sind die Funktionen $\psi_n(x_2)$ nur als die Koeffizienten der Entwicklung von ψ in eine Reihe orthogonaler Funktionen $u_n(x_1)$ zu betrachten. Nehmen wir nun an, daß die Größe A gemessen und so ihr Wert a_k gefunden wurde. Es wird dann geschlossen, daß sich nach der Messung das erste System in dem durch die Wellenfunktion $u_k(x_1)$ gegebenen Zustand und das zweite System in dem durch die Wellenfunktion $\psi_k(x_2)$ gegebenen Zustand befindet. Dies ist der Vorgang der Reduktion des Wellenpakets; das Wellenpaket, das die unendliche Reihe (7) darstellt, wird auf einen einzigen Ausdruck

$$\psi_k(x_2)\, u_k(x_1)$$

reduziert.

Der Satz von Funktionen $u_n(x_1)$ ist durch die Wahl der physikalischen Größe A bestimmt. Hätten wir stattdessen eine andere Größe, sagen wir B, gewählt, die die Eigenwerte $b_1, b_2, b_3, \ldots$ und Eigenfunktionen $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots$ besitzt, so hätten wir an Stelle von Gleichung (7) die Entwicklung

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2)\, v_s(x_1), \tag{8}$$

erhalten, wobei die ψ_s die neuen Koeffizienten sind. Wenn nun die Größe B gemessen und ihr Wert b_r gefunden wird, schließen wir, daß sich nach der Messung das erste System in dem durch $v_r(x_1)$ gegebenen Zustand und das zweite System in dem durch $\varphi_r(x_2)$ gegebenen Zustand befindet.

Wir sehen daher, daß als Folge zweier verschiedener Messungen, die an dem ersten System ausgeführt werden, das zweite System in Zuständen mit zwei verschiedenen Wellenfunktionen vorliegt. Da andererseits die beiden Systeme zum Zeitpunkt der Messung nicht mehr miteinander in Wechselwirkung stehen, kann nicht wirklich eine Änderung in dem zweiten System als Folge von irgendetwas auftreten, das dem ersten System zugefügt werden mag. Es handelt sich hierbei natürlich nur um eine Äußerung dessen, was mit der Abwesenheit der Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen gemeint ist. *Es ist daher möglich, zwei verschiedene Wellenfunktionen* (in unserem Beispiel ψ_k und φ_r) *der gleichen Wirklichkeit zuzuordnen* (nämlich dem zweiten System nach der Wechselwirkung mit dem ersten).

Nun kann es vorkommen, daß die beiden Wellenfunktionen, ψ_k und φ_r, Eigenfunktionen von zwei nicht-kommutierenden Operatoren sind, die jeweils gewissen physikalischen Größen P und Q entsprechen. Daß dieser Fall tatsächlich auftreten kann, läßt sich am besten an einem Beispiel zeigen. Angenommen, die beiden Systeme sind zwei Teilchen, und es gelte

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x_1 - x_2 + x_0)p}\, dp, \tag{9}$$

wobei x_0 eine Konstante ist. Es sei A der Impuls des ersten Teilchens; dann wird sich, wie wir in Gleichung (4) gesehen haben, seine Eigenfunktion zu

$$u_p(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h} p x_1} \tag{10}$$

ergeben mit dem entspechenden Eigenwert p. Da hier der Fall eines kontinuierlichen Spektrums vorliegt, läßt sich Gleichung (7) nun schreiben

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2)\, u_p(x_1)\, dp, \tag{11}$$

wobei

$$\psi_p(x_2) = e^{-\frac{2\pi i}{h}(x_2 - x_0)p}. \tag{12}$$

Dies ψ_p jedoch ist die Eigenfunktion des Operators

$$P = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{13}$$

mit dem entsprechenden Eigenwert $-p$ des Impulses des zweiten Teilchens. Wenn andererseits B die Koordinate des zweiten Teilchens ist, sind die dazu gehörigen Eigenfunktionen

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \tag{14}$$

mit dem entsprechenden Eigenwert x, wobei $\delta(x_1 - x)$ die bekannte Diracsche Deltafunktion ist. Gleichung (8) wird in diesem Fall

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2)\, v_x(x_1)\, dx, \tag{15}$$

wobei

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x - x_2 + x_0)p}\, dp = h\,\delta(x - x_2 + x_0). \tag{16}$$

Dieses φ_x ist jedoch die Eigenfunktion des Operators

$$Q = x_2 \tag{17}$$

entsprechend dem Eigenwert $x + x_0$ der Koordinate des zweiten Teilchens. Da

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}, \tag{18}$$

haben wir gezeigt, daß es i.a. möglich ist, daß ψ_k und φ_r Eigenfunktionen zweier nicht-kommutierender Operatoren sind, die physikalischen Größen entsprechen.

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Fall zurück, der in den Gleichungen (7) und (8) betrachtet wird, und nehmen wir an, daß ψ_k und φ_r tatsächlich Eigenfunktionen gewisser nicht-kommutierender Operatoren P und Q mit entsprechenden Eigenwerten p_k und q_r sind. Wir werden daher durch die Messungen von A oder B in die Lage versetzt, mit Sicherheit, und ohne auf irgendeine Weise das zweite System zu stören, entweder die Größe P (d.h. p_k) oder den Wert der Größe Q (d.h. q_r) vorherzusagen. Im Einklang mit unserem Realitätskriterium müssen wir im ersten Fall die Größe P als ein Element der Realität betrachten, im zweiten Fall ist die Größe Q als ein Element der Realität anzusehen. Wie wir aber gesehen haben, gehören beide Wellenfunktionen ψ_k und φ_r zur gleichen Realität.

Zunächst bewiesen wir, daß entweder (1) die quantenmechanische Beschreibung der Realität, wie sie die Wellenfunktion gibt, nicht vollständig ist oder (2) bei Vorliegen zweier nicht-kommutierender Operatoren den entsprechenden beiden physikalischen Größen nicht zugleich Realität zukommt. Indem wir dann mit der Annahme begannen, daß die Wellenfunktion eine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert, gelangten wir zu dem Schluß, daß zwei physikalischen Größen mit nicht-kommutierenden Operatoren zugleich Realität zukommen kann. Auf diese Weise führt die Negation von (1) auf die Negation der einzigen anderen Alternative (2). Wir werden so gezwungen zu schließen, daß die durch die Wellenfunktionen vermittelte quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität nicht vollständig ist.

Man könnte Einwände gegen diesen Schluß erheben unter Berufung darauf, daß unser Realitätskriterium nicht hinreichend restriktiv ist. Tatsächlich würde man nicht zu unserer Schlußfolgerung gelangen, bestünde man darauf, zwei oder mehr physikalische Größen *nur dann* zugleich als Elemente der Realität zu betrachten, *wenn sie gleichzeitig gemessen oder vorhergesagt werden können.* Aus dieser Sicht sind die Größen P und Q nicht zugleich real, da entweder die eine oder die andere der Größen, nicht aber beide zugleich vorhergesagt werden können. Dadurch wird der Realitätsanspruch von P und Q vom Vorgang der Messung abhängig, die am ersten System ausgeführt wird und die auf keine Weise das zweite System beeinflußt. Man darf nicht erwarten, daß dies irgendeine vernünftige Definition der Realität zuläßt.

Während wir somit gezeigt haben, daß die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert, lassen wir die Frage offen, ob eine solche Beschreibung existiert oder nicht. Wir glauben jedoch, daß eine solche Theorie möglich ist.

Niels Bohr

Kann man die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit als vollständig betrachten? (1935)

Es wird gezeigt, daß ein gewisses „Kriterium der physikalischen Realität“, das in einem unter dem obigen Titel kürzlich erschienenen Artikel von *A. Einstein, B. Podolsky* und *N. Rosen* formuliert wurde, eine wesentliche Mehrdeutigkeit aufweist, wenn man es auf Quantenphänomene anwendet. In diesem Zusammenhang wird ein mit „Komplementarität“ bezeichneter Gesichtspunkt erklärt, unter dem die quantenmechanische Beschreibung physikalischer Systeme innerhalb ihres Geltungsbereiches allen rationalen Erfordernissen der Vollständigkeit genügt.

In einem kürzlich unter dem obigen Titel erschienenen Artikel [1] legen *A. Einstein, B. Podolsky* und *N. Rosen* Argumente dar, die sie zu einer negativen Beantwortung der oben gestellten Frage führen. Die Richtung ihrer Argumentation scheint mir jedoch der tatsächlichen Situation, der wir in der Atomphysik gegenüberstehen, nicht gerecht zu werden. Ich freue mich daher, die Gelegenheit zu einer etwas genaueren Erklärung des allgemeinen Gesichtspunkts ergreifen zu können, der passend mit „Komplementarität“ bezeichnet wurde, worauf ich bei verschiedenen früheren Gelegenheiten hingewiesen habe [2], und unter dem die Quantenmechanik innerhalb ihres Anwendungsbereichs als eine völlig rationale Beschreibung physikalischer Phänomene, wie wir ihnen in atomaren Prozessen begegnen, erscheint.

Der Grad, bis zu dem einem Ausdruck wie „physikalische Realität“ eine eindeutige Bedeutung beigemessen werden kann, kann natürlich nicht aus a priori philosophischen Vorstellungen hergeleitet werden, sondern muß – wie die Autoren des zitierten Artikels selbst betonen – durch unmittelbare Berufung auf Experimente und Messungen begründet werden. Zu diesem Zweck schlagen sie folgendes „Realitätskriterium“ vor: „Wenn wir, ohne auf irgendeine Weise ein System zu stören, den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen können, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser physikalischen Größe entspricht.“ Mit Hilfe eines interessanten Beispiels, auf das wir weiter unten zurückkommen, gehen sie dann dazu über zu zeigen, daß es in der Quantenmechanik ebenso wie in der klassischen Mechanik unter geeigneten Bedingungen möglich ist, den Wert irgendeiner gegebenen Variablen vorherzusagen, die zur Beschreibung eines mechanischen Systems gehört und aus Messungen gewonnen ist, die vollständig an anderen Systemen durchgeführt wurden, welche zuvor in Wechselwirkung mit dem zu untersuchenden System standen. Gemäß ihrem Kriterium wollen daher die Autoren jeder der durch solche Variablen dargestellten Größen ein Element der Realität zuordnen. Da es ferner ein wohlbekanntes Charakteristikum des gegenwärtigen Formalismus der Quantenmechanik ist, daß es bei der Beschreibung eines quantenmechanischen Systems niemals möglich ist, zwei kanonisch konjugierten Variablen zugleich definierte Werte zuzuschreiben, beurteilen sie diesen Formalismus folglich als unvollständig und äußern die Überzeugung, daß eine befriedigende Theorie entwickelt werden kann.

Solch eine Argumentation dürfte jedoch kaum geeignet sein, die Zuverlässigkeit einer quantenmechanischer Beschreibung in Frage zu stellen, die sich auf einen kohärenten mathematischen Formalismus stützt, der automatisch für jeden Meßvorgang wie den erwähnten aufkommt[1]. Der scheinbare Widerspruch deckt lediglich eine wesentliche Schwäche des üblichen Gesichtspunkts der Naturphilosophie auf hinsichtlich einer rationalen Beschreibung von physikalischen Phänomenen des Typs, mit dem wir uns in der Quantenmechanik befassen. In der Tat hat die *endliche Wechselwirkung zwischen Objekt und Meßvorrichtungen*, die durch die bloße Existenz des Wirkungsquantums bedingt ist, die Notwendigkeit einer letztlichen Aufgabe des klassischen Kausalitätsideals und eine grundlegende Revision unserer Haltung gegenüber dem Problem der physikalischen Realität zur Folge – und zwar wegen der Unmöglichkeit, die Rückwirkung des Objekts auf die Meßinstrumente zu kontrollieren, sofern diese ihrem Zwecke dienen sollen. Tatsächlich enthält, wie wir sehen werden, ein Realitätskriterium wie das von den Autoren vorgeschlagene – wie vorsichtig auch immer seine Formulierung erscheinen mag – eine wesentliche Mehrdeutigkeit, wenn es auf die wirklichen Probleme, mit denen wir uns hier befassen, angewandt wird. Um zu diesem Zweck das Argument so deutlich wie möglich zu machen, werde ich zuerst etwas ausführlicher einige einfache Beispiele von Meßvorrichtungen betrachten.

Wir wollen mit dem einfachen Fall eines Teilchens beginnen, welches den Schlitz eines Diaphragmas passiert, das Bestandteil einer mehr oder weniger komplizierten experimentellen Anordnung ist. Auch wenn der Impuls des Teilchens vollständig bekannt ist, bevor es auf das Diaphragma stößt, wird die durch den Schlitz verursachte Beugung der ebenen Welle, die den Teilchenzustand symbolisch darstellt, eine Impulsunschärfe des Teilchens nach seinem Durchtritt durch das Diaphragma bedingen, die um so größer ist, je enger der Schlitz ist. Nun kann die Breite des Schlitzes, solange sie nur groß ist im Vergleich zur Wellenlänge, als die Ortsunschärfe Δq des Teilchens in bezug auf das Diaphragma in der Richtung senkrecht zum Schlitz betrachtet werden.

Ferner sieht man leicht aus der de Broglie'schen Beziehung zwischen Impuls und Wellenlänge, daß in dieser Richtung die Impulsunschärfe des Teilchens Δp korreliert ist mit Δq über Heisenbergs allgemeines Prinzip

$$\Delta p \cdot \Delta q \sim h,$$

das im quantenmechanischen Formalismus eine unmittelbare Folge der Vertauschungsrelation für ein Paar konjugierter Variabler ist. Offensichtlich ist die Unschärfe Δp untrennbar verbunden mit der Möglichkeit eines Impulsaustausches zwischen dem Teilchen und dem Diaphragma; und die für unsere Diskussion besonders interessante Frage ist nun, in welchem Maße der auf diese Weise ausgetauschte Impuls bei der Beschreibung des Phänomens, das mit der betreffenden experimentellen Anordnung zu untersuchen ist und als dessen Anfangsstadium sich der Teilchendurchgang durch den Schlitz betrachten läßt, berücksichtigt werden kann.

Wir wollen zunächst wie bei den entsprechenden Experimenten über die bemerkenswerten Phänomene der Elektronenbeugung annehmen, daß das Diaphragma ebenso wie die anderen Teile der Anordnung – nehmen wir etwa ein zweites Diaphragma mit mehreren Schlitzen parallel zum ersten und eine photographische Platte an – starr verbunden ist mit einem Ständer, der das räumliche Bezugssystem festlegt. Dann wird der zwischen Teilchen und Diaphragma ausgetauschte Impuls zusammen mit der Rückwirkung des Teilchens auf die anderen Körper diesem gemeinsamen Ständer übertragen, und wir haben damit freiwillig auf jede Möglichkeit verzichtet, diese Rückwirkung zum Vorhersagen des Endresultats des Experiments gesondert zu berücksichtigen – wie etwa des Ortes des von dem Teilchen auf der photographischen Platte erzeugten Flecks. Die Unmöglichkeit einer genaueren Analyse der Wechselwirkungen zwischen dem Teilchen und dem Meßinstrument ist in der Tat keine Besonderheit des beschriebenen experimentellen Verfahrens, sondern vielmehr eine wesentliche Eigenschaft jeder Anordnung, die zum Studium der Phänomene des betreffenden Typs geeignet ist, wobei wir es mit einem Zug der *Individualität* zu tun haben, der der klassischen Physik völlig fremd ist. Tatsächlich würde uns jede Möglichkeit, den zwischen dem Teilchen und den einzelnen Teilen der Apparatur ausgetauschten Impuls zu berücksichtigen, sofort erlauben, Schlüsse hinsichtlich des „Ablaufs" solcher Phänomene zu ziehen – etwa durch welchen Schlitz des zweiten Diaphragmas das Teilchen auf seinem Weg zur Photoplatte hindurchfliegt –, was völlig unverträglich mit der Tatsache wäre, daß die Wahrscheinlichkeit des Teilchens, ein bestimmtes Flächenelement dieser Platte zu erreichen, nicht durch die Existenz irgendeines einzelnen Schlitzes bestimmt ist, sondern durch die Positionen aller Schlitze des zweiten Diaphragmas, die sich in der Reichweite der zugeordneten und an dem Schlitz des ersten Diaphragmas gebeugten Welle befinden.

Mit Hilfe einer anderen Anordnung, bei der das erste Diaphragma nicht starr mit den anderen Teilen der Apparatur verbunden ist, wäre es zumindest im Prinzip[2] möglich, den Teilchenimpuls mit jeder gewünschten Genauigkeit vor und nach seinem Durchgang zu messen und so den Impuls des Teilchens vorherzusagen, nachdem es durch den Schlitz hindurchgetreten ist. Tatsächlich erfordern solche Impulsmessungen nur eine eindeutige Anwendung des klassischen Gesetzes der Impulserhaltung, angewandt z.B. auf einen Stoßprozeß zwischen dem Diaphragma und einem Testkörper, dessen Impuls vor und nach dem Stoß geeignet kontrolliert wird. Freilich wird solch eine Kontrolle wesentlich von einer Prüfung des raum-zeitlichen Verlaufs eines Prozesses abhängen, auf den die Vorstellungen der klassischen Mechanik angewandt werden können; wenn jedoch alle räumlichen Ausmaße und Zeitintervalle hinreichend groß gewählt werden, enthält dies selbstverständlich keine Einschränkung hinsichtlich der genauen Impulskontrolle der Testkörper, sondern nur einen Verzicht hinsichtlich der Genauigkeit der Kontrolle ihrer Raum-Zeit-Koordination. Dieser letztere Umstand ist in der Tat völlig analog zu dem Verzicht auf die Kontrolle des Impulses des befestigten Diaphragmas, das in der experimentellen Anordnung oben erläutert wurde, und hängt letztlich von der Forderung einer rein klassischen Beschreibung der Meßapparatur ab, welche die Notwendigkeit in sich birgt, einen Spielraum entsprechend den quantenmechanischen Unbestimmtheitsrelationen in unserer Beschreibung einzuräumen.

Der Hauptunterschied zwischen den beiden betrachteten experimentellen Anordnungen besteht jedoch darin, daß in der Anordnung, die zur Kontrolle des Impulses des ersten Diaphragmas geeignet ist, dieser Körper aus dem gleichen Grund wie in dem vorigen Fall nicht mehr als Meßinstrument verwendet werden kann, sondern hinsichtlich seiner relativen Lage zu der übrigen Apparatur ebenso wie das Teilchen, das den Schlitz passiert, als ein Untersuchungsobjekt behandelt werden muß und zwar in dem Sinne, daß die quantenmechanischen Unbestimmtheitsrelationen bezüglich seiner Lage und seines Impulses explizit in Rechnung gestellt werden müssen. Auch wenn wir die Lage des Diaphragmas relativ zu dem räumlichen Bezugssystem vor der ersten Messung seines Impulses kennen würden und obwohl sein Ort nach der letzten Messung genau bestimmt werden kann, würden wir wegen der unkontrollierbaren Verschiebung des Diaphragmas während jedes Stoßvorgangs mit den Testkörpern die Kenntnis des Ortes des Teilchens verlieren, wenn es durch den Schlitz hindurchtritt. Die ganze Anordnung ist daher offensichtlich nicht dazu geeignet, die gleiche Art von Phänomenen wie im vorigen Fall zu untersuchen. Insbesondere kann gezeigt werden, daß – wenn der Impuls des Diaphragmas mit hinreichender Genauigkeit gemessen wird, um genaue Schlüsse hinsichtlich des Teilchendurchgangs durch einen bestimmten Schlitz des zweiten Diaphragmas zuzulassen – dann sogar die minimale, mit solcher Kenntnis verträgliche Ortsunschärfe des ersten Diaphragmas das völlige Auswischen jedes Interferenzeffektes – bezüglich der Zonen erlaubter Aufschläge des Teilchens auf der Photoplatte – zur Folge hat, wie es das Vorhandensein mehr als eines Schlitzes im zweiten Diaphragma im Falle fester relativer Positionen aller Apparaturenteile bewirken würde.

Bei einer zu Messungen des Impulses des ersten Diaphragmas geeigneten Anordnung ist ferner klar, daß wir, auch wenn wir diesen Impuls vor dem Durchgang des Teilchens durch den Schlitz gemessen haben, nach diesem Durchtritt *freie Wahl* haben, ob wir den Teilchenimpuls oder seine Anfangslage relativ zu der übrigen Apparatur kennen wollen. Im ersten Fall müssen wir nur eine zweite Bestimmung des Diaphragmaimpulses vornehmen, die seinen genauen Ort ein für allemal unbestimmbar läßt, wenn das Teilchen durchgegangen ist. Im zweiten Fall müssen wir nur seinen Ort relativ zu dem räumlichen Bezugssystem bestimmen bei unvermeidbarem Verlust der Kenntnis des Impulses, der zwischen Diaphragma und Teilchen ausgetauscht wurde. Wenn das Diaphragma im Vergleich zu dem Teilchen hinreichend massiv ist, können wir den Meßvorgang sogar so gestalten, daß das Diaphragma nach der ersten Bestimmung seines Impulses in irgendeiner unbekannten Lage relativ zu den anderen Apparateteilen in Ruhe bleibt und die nachfolgende Festlegung dieses Ortes kann daher einfach darin bestehen, eine feste Verbindung zwischen dem Diaphragma und dem gemeinsamen Ständer herzustellen.

Mein Hauptanliegen bei der Wiederholung dieser einfachen und in ihrem Wesen wohlbekannten Betrachtungen ist zu betonen, daß wir es bei den betreffenden Phänomenen nicht mit einer unvollständigen Beschreibung zu tun haben, die durch das willkürliche Herausgreifen verschiedener Elemente physikalischer Realität auf Kosten anderer solcher Elemente charakterisiert ist, sondern mit einer rationalen Unterscheidung zwischen wesentlich verschiedenen experimentellen Anordnungen und Verfahren, die entweder zu einer eindeutigen Anwendung der Vorstellung der Ortsbestimmung oder zu einer Anwendung des Impulserhaltungssatzes geeignet sind. Jeder verbleibende Anschein von Willkür widerspiegelt nur unsere Freiheit, mit den Meßinstrumenten umzugehen, wie sie ja überhaupt für den Begriff Experiment selber charakteristisch ist. In der Tat ist bei jeder experimentellen Anordnung der Verzicht auf den einen oder den anderen der beiden Aspekte der Beschreibung physikalischer Phänomene – deren Kombination die Methode der klassischen Physik kennzeichnet und die daher in diesem Sinne als *komplementär* zueinander betrachtet werden können – im wesentlichen durch die Unmöglichkeit begründet, auf dem Gebiet der Quantentheorie die Rückwirkung des Objektes auf die Meßinstrumente, d.h. die Impulsübertragung im Falle von Ortsbestimmungen und die örtliche Verschiebung im Falle von Impulsbestimmungen, zu kontrollieren. Gerade in dieser letzten Hinsicht ist jeder Vergleich zwischen Quantenmechanik und gewöhnlicher statistischer Mechanik – wie nützlich er für die formale Darlegung der Theorie auch immer sein mag – dem Wesen nach belanglos. Tatsächlich haben wir es bei jeder experimentellen Anordnung, die zum Studium reiner Quantenphänomene geeignet ist, nicht nur mit einer Unkenntnis des Wertes gewisser physikalischer Größen zu tun, sondern mit der Unmöglichkeit, diese Größen auf eindeutige Weise zu definieren.

Die soeben gemachten Bemerkungen gelten in gleichem Maße für das spezielle, von *Einstein, Podolsky* und *Rosen* behandelte Problem, auf das oben verwiesen wurde und das in der Tat keine größeren Schwierigkeiten aufweist als die oben diskutierten Beispiele. Der besondere quantenmechanische Zustand von zwei freien Teilchen, für den die Autoren einen expliziten mathematischen Ausdruck angeben, kann, zumindest im Prinzip, durch eine einfache experimentelle Anordnung wiedergegeben werden, bestehend aus einem starren Diaphragma mit zwei parallelen und im Vergleich zu ihrem Abstand sehr engen Schlitzen, die jeweils ein Teilchen – und zwar unabhängig vom anderen – passiert. Wenn der Impuls des Diaphragmas sowohl vor als auch nach den Teilchendurchtritten genau gemessen wurde, kennen wir in der Tat die Summe der senkrecht zu den Schlitzen stehenden Impulskomponenten der beiden durchgegangenen Teilchen ebenso wie die Differenz ihrer anfänglichen Ortskoordinaten in der gleichen Richtung; indessen sind natürlich die konjugierten Größen, d.h. die Differenz ihrer Impulskomponenten und die Summe ihrer Ortskoordinaten, vollständig unbekannt[3]. Bei dieser Anordnung ist es daher klar, daß eine nachfolgende getrennte Messung entweder des Ortes oder des Impulses eines der beiden Teilchen automatisch den Ort bzw. den Impuls des anderen Teilchens mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmt – zumindest jedenfalls, wenn die der freien Bewegung jedes Teilchens entsprechende Wellenlänge genügend klein ist im Vergleich zur Breite der Schlitze. Wie von den genannten Autoren ausgeführt wurde, haben wir deshalb in diesem Stadium vollständig freie Wahl, ob wir die eine oder andere der letzteren Größen durch einen Prozeß bestimmen wollen, der nicht direkt auf das betroffene Teilchen einwirkt.

Ebenso wie bei dem obigen einfachen Fall der Wahl zwischen experimentellen Verfahren, die zur Vorhersage des Ortes oder des Impulses eines einzigen Teilchens nach seinem Durchgang durch einen Diaphragmaschlitz geeignet sind, stehen wir gerade in der „Freiheit der Wahl", die uns die letzte Anordnung beläßt, *einer Unterscheidung zwischen verschiedenen experimentellen Verfahren gegenüber, die den unzweideutigen Gebrauch von komplementären klassischen Begriffen erlaubt.* Tatsächlich kann das Messen des Ortes eines der Teilchen nichts anderes bedeuten, als eine Korrelation zwischen seinem Verhalten und einem starr mit dem Ständer, der das räumliche Bezugssystem definiert, verbundenen Instrument zu errichten. Unter den beschriebenen experimentellen Bedingungen wird uns deshalb solch eine Messung auch die Kenntnis des andernfalls völlig unbekannten Ortes des Diaphragmas bezüglich dieses räumlichen Bezugssystems verschaffen, als die Teilchen die Schlitze passiert haben. In der Tat erhalten wir nur auf diese Weise eine Grundlage für Schlüsse über die anfängliche Lage des anderen Teilchens relativ zu der übrigen Apparatur. Indem wir jedoch eine im wesentlichen unkontrollierbare Impulsübertragung von dem ersten Teilchen auf den erwähnten Ständer zulassen, haben wir uns jeglicher zukünftiger Möglichkeit beraubt, das Impulserhaltungsgesetz auf das aus dem Diaphragma und den beiden Teilchen bestehende System anzuwenden, und daher unsere einzige Basis verloren für eine unzweideutige Anwendung des Impulsbegriffes bei den Vorhersagen hinsichtlich des Verhaltens des zweiten Teilchens. Wenn wir umgekehrt die Wahl treffen, den Impuls eines der Teilchen zu messen, verlieren wir durch die in einer solchen Messung unvermeidbare Verschiebung jegliche Möglichkeit, aus dem Verhalten dieses Teilchens die Lage des Diaphragmas relativ zur übrigen Apparatur herzuleiten, und haben daher keinerlei Grundlage für Vorhersagen hinsichtlich des Ortes des anderen Teilchens.

Von unserem Gesichtspunkt aus erkennen wir nun, daß die Formulierung des oben erwähnten, von *Einstein, Podolsky* und *Rosen* vorgeschlagenen Kriteriums der physikalischen Realität eine Mehrdeutigkeit in bezug auf den Sinn des Ausdrucks „ohne ein System irgendwie zu stören" enthält. Natürlich ist in einem Fall wie dem soeben betrachteten nicht die Rede von einer mechanischen Störung des zu untersuchenden Systems während der letzten kritischen Phase des Meßverfahrens. Aber selbst in dieser Phase handelt es sich wesentlich um *einen Einfluß auf die tatsächlichen Bedingungen, welche die möglichen Arten von Voraussagen über das zukünftige Verhalten des Systems definieren.* Da diese Bedingungen ein immanentes Element der Beschreibung jeglichen Phänomens ausmachen, dem man mit Recht den Begriff „physikalische Wirklichkeit" zuschreiben kann, sehen wir, daß die Argumentation der genannten Verfasser nicht ihre Schlußfolgerung rechtfertigt, die quantenmechanische Beschreibung sei wesentlich unvollständig. Im Gegenteil kann diese Beschreibung, wie die obige Diskussion zeigt, als eine rationale Ausnutzung aller Möglichkeiten eindeutiger Interpretation von Messungen charakterisiert werden, wie sie auf dem Gebiet der Quantentheorie mit der endlichen und unkontrollierbaren Wechselwirkung zwischen den Objekten und den Meßgeräten vereinbar ist. Tatsächlich ist es nur der gegenseitige Ausschluß von je zwei die eindeutige Definition komplementärer physikalischer Größen gestattenden Versuchsanordnungen, der neuen physikalischen Gesetzen Raum schafft, deren Koexistenz auf den ersten Blick mit den Grundprinzipien der Naturwissenschaften unvermeidbar zu sein scheint. Es ist gerade diese völlig neue Situation bezüglich der Beschreibung physikalischer Phänomene, deren Kennzeichnung mit dem Begriff *Komplementarität* angestrebt wird.

Die bislang erörterten experimentellen Anordnungen sind durch besondere Einfachheit gekennzeichnet um der untergeordneten Rolle willen, die der Zeitbegriff bei der Beschreibung der in Rede stehenden Phänomene spielt. Gewiß haben wir freien Gebrauch gemacht von solchen Worten wie „vor" und „nach" bezüglich zeitlicher Beziehungen; auf jeden Fall aber muß eine gewisse Ungenauigkeit eingeräumt werden, die jedoch so lange bedeutungslos ist, wie die betreffenden Zeitintervalle hinreichend groß sind im Vergleich zu den eigentlichen Zeiträumen, die in die engere Analyse des untersuchten Phänomens eingehen. Sobald wir eine genauere Beschreibung von Quantenphänomenen versuchen, stoßen wir auf wohlbekannte neue Paradoxa, zu deren Aufklärung weitere Züge der Wechselwirkung zwischen den Objekten und den Meßinstrumenten berücksichtigt werden müssen. In der Tat haben wir es bei solchen Phänomenen nicht mehr mit experimentellen Anordnungen zu tun, die aus Apparaturen bestehen, die sich relativ zueinander im wesentlichen in Ruhe befinden, sondern mit Anordnungen, die bewegte Teile enthalten – wie Verschlüsse vor den Schlitzen der Diaphragmen – und von Mechanismen kontrolliert werden, die als Uhren dienen. Außer dem oben diskutierten Impulsübertrag zwischen dem Objekt und den Körpern, die das räumliche Bezugssystem definieren, werden wir daher in solchen Anordnungen einen eventuell auftretenden Energieaustausch zwischen dem Objekt und diesen uhrenähnlichen Mechanismen betrachten.

Der entscheidende Punkt hinsichtlich der Zeitmessung in der Quantentheorie steht nunmehr in völliger Analogie zu dem oben ausgeführten, die Ortsmessung betreffenden Argument. Genau wie sich der Impulsübertrag auf die verschiedenen Teile der Apparatur – deren relative Lager zur Beschreibung des Phänomens bekannt sein muß – als völlig unkontrollierbar herausgestellt hat, entzieht sich auch der Energieaustausch zwischen dem Objekt und den verschiedenen Körpern, deren relative Bewegung für die beabsichtigte Verwendung der Apparatur bekannt sein muß, jeder eingehenden Analyse. In der Tat ist es *prinzipiell ausgeschlossen, die auf die Uhren übertragene Energie zu kontrollieren, ohne ihre Verwendung als Zeitanzeiger wesentlich zu beeinträchtigen.* Diese Verwendung beruht tatsächlich vollständig auf der Voraussetzung der Möglichkeit, daß das Funktionieren jeder Uhr ebenso wie ihr etwaiger Vergleich mit anderen Uhren auf der Grundlage der Methoden der klassischen Physik zu verstehen ist. In dieser Beschreibung müssen wir offensichtlich eine Breite in der Energiebilanz berücksichtigen, die der quantenmechanischen Unbestimmtheitsrelation zwischen den konjugierten Zeit- und Energievariablen entspricht. Genau wie in der oben erörterten Frage des gegenseitigen Ausschlusses eines eindeutigen Gebrauchs der Begriffe von Ort und Impuls in der Quantentheorie ist es letztlich dieser Umstand, der die komplementäre Beziehung zur Folge hat zwischen irgendeiner genauen Zeitangabe über atomare Phänomene einerseits und den nicht-klassischen Zügen der inneren Stabilität von Atomen andererseits, wie sie beim Studium der Energieübertragung in atomaren Reaktionen zu Tage treten.

Von dieser Notwendigkeit, in jeder experimentellen Anordnung zwischen denjenigen Teilen des physikalischen Systems zu unterscheiden, die als Meßinstrumente betrachtet werden sollen und denjenigen, die die zu untersuchenden Objekte ausmachen, läßt sich in der Tat sagen, daß sie einen *prinzipiellen Unterschied zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung physikalischer Phänomene* darstellt. Freilich ist die Stelle innerhalb jedes

Meßvorgangs, an der diese Unterscheidung getroffen wird, in beiden Fällen großenteils eine Frage der Zweckmäßigkeit. Während jedoch in der klassischen Physik die Unterscheidung zwischen Objekt und Meßvorrichtungen keinerlei Unterschied im Charakter der Beschreibung der betreffenden Phänomene zur Folge hat, wurzelt ihre grundlegende Bedeutung in der Quantentheorie, wie wir gesehen haben, im unumgänglichen Gebrauch klassischer Begriffe zur Interpretation aller eigentlichen Messungen, obwohl die klassischen Theorien nicht hinreichen, die neuen Typen von Gesetzmäßigkeiten zu erklären, mit denen wir uns in der Atomphysik befassen. Entsprechend diesem Sachverhalt ist die einzige in Frage kommende eindeutige Interpretation der quantenmechanischen Symbole in den wohlbekannten Regeln enthalten, welche die Vorhersage von Ergebnissen ermöglichen, wie sie mit Hilfe einer gegebenen und auf völlig klassische Weise beschreibbaren experimentellen Anordnung erhalten werden, und die ihren allgemeinen Ausdruck in den schon erwähnten Transformationstheoremen finden. Indem man ihre geeignete Korrespondenz zur klassischen Theorie sicherstellt, schließen diese Theoreme insbesondere jede denkbare Inkonsistenz in der quantenmechanischen Beschreibung aus, die verknüpft ist mit einem Wechsel der Stelle, an der die Trennung zwischen Objekt und Meßvorrichtung vorgenommen wird. Tatsächlich ist es eine offensichtliche Konsequenz der obigen Argumentation, daß wir bei allen experimentellen Anordnungen und Meßverfahren freie Wahl dieser Stelle nur innerhalb eines Gebietes haben, in dem die quantenmechanische Beschreibung des betreffenden Vorgangs wirklich äquivalent ist zur klassischen Beschreibung.

Bevor ich schließe, möchte ich noch die Bedeutung der großen Belehrung hervorheben, die aus der allgemeinen Relativitätstheorie hinsichtlich der Frage der physikalischen Realität auf dem Gebiet der Quantentheorie abzuleiten ist. Tatsächlich weisen ungeachtet aller charakteristischer Unterschiede die Situationen, mit denen wir uns in diesen Verallgemeinerungen der klassischen Theorie befassen, auffallende Analogien auf, die oft bemerkt worden sind. Insbesondere erscheint die einzigartige Rolle der Meßinstrumente in der Beschreibung der soeben diskutierten Quantenphänomene in enger Analogie zu der wohlbekannten Notwendigkeit, in der Relativitätstheorie eine gewöhnliche Beschreibung aller Meßprozesse aufrechtzuerhalten, die eine strenge Unterscheidung zwischen Raum- und Zeitkoordinaten einschließt, obwohl gerade das Wesentliche dieser Theorie in der Aufstellung neuer physikalischer Gesetze besteht, zu deren Verständnis wir die übliche Trennung von Raum- und Zeitvorstellungen aufgeben müssen[4]. Die in der Relativitätstheorie bestehende Abhängigkeit der Maßstab- und Uhrenablesung vom Bezugssystem kann sogar verglichen werden mit dem wesentlich unkontrollierbaren Impuls- oder Energieaustausch zwischen den Objekten der Messung und allen das raum-zeitliche Bezugssystem definierenden Instrumenten, was uns in der Quantentheorie mit der durch den Begriff der Komplementarität charakterisierten Situation konfrontiert. In der Tat bedeutet dieser neue Zug der Naturphilosophie eine radikale Revision unserer Einstellung zur physikalischen Realität, die sich mit der grundlegenden Änderung aller Vorstellungen hinsichtlich des absoluten Charakters physikalischer Phänomene vergleichen läßt, wie sie die allgemeine Relativitätstheorie mit sich brachte.

Anmerkungen

1 Die in dem zitierten Artikel enthaltenen Herleitungen können in diesem Zusammenhang als eine unmittelbare Folge des Transformationstheorems der Quantenmechanik betrachtet werden, das vielleicht mehr als irgendein anderes Charakteristikum des Formalismus dazu beiträgt, seine mathematische Vollständigkeit und seine vernünftige Korrespondenz mit der klassischen Mechanik zu sichern. In der Tat ist es bei der Beschreibung eines mechanischen Systems, das aus zwei Teilsystemen (1) und (2) besteht, mögen sie nun wechselwirken oder nicht, immer möglich, beliebige zwei den Systemen (1) und (2) zugehörige Paare kononischer Variabler $(q_1, p_1), (q_2, p_2)$, die den üblichen Vertauschungsregeln

$$[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = \frac{ih}{2\pi},$$

$$[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = [q_1, p_2] = [q_2, p_1] = 0$$

genügen, durch zwei Paare neuer kanonischer Variabler (Q_1, P_1), (Q_2, P_2) zu ersetzen, welche aus den ersteren Variablen durch eine einfache orthogonale Transformation hervorgehen, die einer Drehung um den Winkel θ in den Ebenen (q_1, q_2), (p_1, p_2) entspricht

$$q_1 = Q_1 \cos\theta - Q_2 \sin\theta \qquad p_1 = P_1 \cos\theta - P_2 \sin\theta$$
$$q_2 = Q_1 \sin\theta + Q_2 \cos\theta \qquad p_2 = P_1 \sin\theta + P_2 \cos\theta.$$

Daraus, daß diese Variablen analogen Vertauschungsregeln genügen, insbesondere

$$[Q_1, P_1] = \frac{ih}{2\pi}, \quad [Q_1, P_2] = 0,$$

folgt, daß man bei der Beschreibung des Zustands des kombinierten Systems Q_1 und P_1 nicht zugleich bestimmte numerische Werte zuordnen kann, sondern daß wir solche Werte klar nur Q_1 und P_2 zuordnen können. In diesem Fall ergibt sich ferner, wenn man diese Variablen durch (q_1, p_1) und (q_2, p_2) ausdrückt, nämlich

$$Q_1 = q_1 \cos\theta + q_2 \sin\theta, \qquad P_2 = -p_1 \sin\theta + p_2 \cos\theta,$$

daß eine nachfolgende Messung von entweder q_2 oder p_2 uns gestatten würde, die Werte von q_1 bzw. p_1 vorherzusagen.

2 Die offensichtliche Unmöglichkeit, mit der zu unserer Verfügung stehenden experimentellen Technik solche Meßverfahren, wie sie hier und im folgenden diskutiert werden, wirklich durchzuführen, beeinflußt selbstverständlich nicht die theoretische Argumentation, da die fraglichen Vorgänge wesentlich äquivalent sind zu atomaren Prozessen wie etwa dem Compton-Effekt, wobei eine entsprechende Anwendung des Impulserhaltungstheorems gesichert ist.

3 Wie gezeigt wird, entspricht diese Beschreibung bis auf einen trivialen Normierungsfaktor genau der in der vorangegangenen Fußnote beschriebenen Transformation von Variablen, wenn (q_1, p_1), (q_2, p_2) die Ortskoordinaten und Impulskomponenten der beiden Teilchen darstellen, und wenn $\theta = -\pi/4$. Es sei auch bemerkt, daß die durch Formel (9) des zitierten Artikels gegebene Wellenfunktion der speziellen Wahl von $P_2 = 0$ und dem Grenzfall zweier infinitesimal enger Schlitze entspricht.

4 Gerade dieser Umstand im Verein mit der relativistischen Invarianz der Unschärferelation der Quantenmechanik stellt die Vereinbarkeit von der im vorliegenden Artikel skizzierten Argumentation und allen Erfordernissen der Relativitätstheorie sicher. Diese Frage wird eingehender in einer zur Veröffentlichung vorbereiteten Abhandlung behandelt werden, in der der Verfasser insbesondere ein sehr interessantes, von *Einstein* aufgeworfenes Paradoxon diskutieren wird, das die Anwendung der Gravitationstheorie auf Energiemessungen betrifft und dessen Lösung eine besonders lehrreiche Illustration der Allgemeingültigkeit des Komplentaritätsarguments bietet. Bei derselben Gelegenheit wird eine gründlichere Erörterung der Raum-Zeit-Messungen in der Quantentheorie mit allen nötigen mathematischen Entwicklungen und Diagrammen experimenteller Anordnung gegeben, die in diesem Artikel, in dem das Hauptgewicht auf den dialektischen Aspekt der Titelfrage gelegt wurde, ausgelassen werden mußten.

Literaturangaben

[1] *A. Einstein, B. Podolsky* and *N. Rosen*, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
[2] *Cf. N. Bohr*, Atomic Theory and Description of Nature (Cambridge, 1934).