Detlef H. Rost (Hrsg.)

Handwörterbuch Pädagogische Psychologie

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

BELTZ PVU

Mathematiklernen

Elsbeth Stern • Anja Felbrich • Michael Schneider

1 Mathematik – ein von der Natur privilegiertes Kulturgut

Fast alle Menschen werden mit Voraussetzungen geboren, die ihnen einen intuitiven Zugang zur Welt der Quantitäten ermöglichen. Ergebnisse der Säuglingsforschung belegen inzwischen eindrucksvoll die modularisierten Grundlagen mathematischer Kompetenzen (Wynn, 1992). Jede bekannte menschliche Kultur verfügt über eigene Zahlwörter, um mindestens im Zahlenbereich bis 20 zu differenzieren. Die vier Grundrechenarten, die die meisten unserer Kinder spätestens am Ende der Grundschulzeit beherrschen, sind in Europa jedoch erst seit dem 14. Jahrhundert üblich. Noch vor 1000 Jahren hätte man bei keinem europäischen Kind eine Rechenschwäche diagnostizieren können, weil nicht im heutigen Sinne gerechnet wurde.

Mathematik ist – wie die Schriftsprache – ein Ergebnis kultureller Entwicklung, d.h. beide wurden zwar auf der Grundlage angeborener Kompetenzen entwickelt, können jedoch nicht als angeboren betrachtet werden (→ Anlage und Umwelt). Diese jahrhundertelange Entwicklung muss dabei im Unterricht in kurzer Zeit nachvollzogen werden. So stehen heute Bruch- und Prozentrechnung, Algebra und Infinitesimalrechnung ganz selbstverständlich auf dem schulischen Lehrplan, obwohl sie erst vor einigen Jahrhunderten entwickelt wurden. Vor diesem Hintergrund sind die Schwierigkeiten der meisten Kinder mit dem Schulfach Mathematik besser zu verstehen (→ Rechenschwächen). Um die kulturelle Mathematik zu begreifen, müssen Kinder sehr viele zunächst kontraintuitive Schlüsse ziehen. Intuitiv lernen Kinder, größere Zahlen für die Bezeichnung größerer Mengen zu benutzen. Mit dem Zehnersystem kommt die erste Irritation: Man muss lernen, dass die *3* in der Zahl *39* größer ist als die *9*. Mit der Einführung von Termini wie „Zehner" und „Einer" und entsprechenden Veranschaulichungen klappt das im Allgemeinen ganz gut. Bei der schriftlichen Subtraktion zeigen sich aber dann doch hartnäckige Verständnisschwierigkeiten: Als Lösung für die Aufgabe *304 – 29 =* kommt nicht selten *325*. Auch wenn das Prinzip des „Borgens" bei einfacheren Aufgaben angewendet werden kann, bereitet es doch Probleme, wenn die *0* im Subtrahenden vorkommt (Huth, 2004).

Auch das Verstehen von Brüchen und Dezimalzahlen erfordert eine Abkehr von der schlichten Regel, nach welcher größere Zahlen immer größere Mengen bezeichnen. Kinder denken zunächst, dass gilt: $1/8 > 1/7$; $0{,}09 > 0{,}10$; $0{,}13 < 0{,}129$ (Siegler, 2003). Ein typischer Fehler im Umgang mit Brüchen besteht auch darin, Zähler und Nenner zu addieren: $2/3 + 4/5 = 6/8$. Die Fehler sind auf vergleichbare Defizite zurückzuführen: Es wird davon ausgegangen, dass Zahlen abzählbare Elemente einer Menge abbilden. Die Grundeinheit ist dabei jeweils das einzelne Element einer Menge. Dass man bei Bruch- und Dezimalzahlen Zahlen nur in Abhängigkeit von einer variablen Grundeinheit interpretieren kann, wird vielfach noch nicht realisiert. Manche sprachlichen Formulierungen legen eine solche Interpretation nahe: Wenn man *3/5* als „drei von fünf" bezeichnet, dann lassen sich auch Situationen konstruieren, aus denen die Addition von Zähler und Nenner bei Brüchen abgeleitet werden kann:

Heute habe ich drei von fünf Brötchen gegessen und gestern habe ich vier von acht Brötchen gegessen.

In diesem Kontext kann es sinnvoll sein, die gegessenen Brötchen und die vorhandenen Brötchen getrennt voneinander zu bezeichnen. Bei dieser Art des Vergleichs ist die Funktion der einzelnen Zahlen des Bruches als absolute Mengeangabe (Zähler) und als Grundgesamtheit (Nenner) nachzuvollziehen. Wenn Kinder zwei Brüche miteinander vergleichen sollen, dann ist der so genannte Zwischenvergleich, bei dem zunächst Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner verglichen werden, einfacher als der so genannte Innerhalbvergleich. Dieser erfordert, die Zählermenge in Beziehung zur Gesamtmenge zu setzen, wobei der Quotient aus beiden eine neue Einheit, das Verhältnis, ergibt (z.B. Geschwindigkeit im Falle von Weg zu Zeit). Wird diese zusammengesetzte Einheit jedoch als eigenständige Größe repräsentiert, deren Bezeichnung nicht direkt auf die ursprünglichen Einheiten hinweist, kann der Bezug zu den Dimensionen, aus denen sie sich zusammensetzt, verloren gehen. Dies zeigt sich an einem Fehler, den auch Studenten machen. Die Aufgabe

Der Weg von der Wohnung zur Arbeit wird mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h zurückgelegt und die mittlere Geschwindigkeit von der Arbeit zur Wohnung beträgt 30 km/h. Wie hoch ist die durchschnittliche Geschwindigkeit beider Wege?

wird von über 90 % der Universitätsstudenten mit „40 km/h" beantwortet. Es wird übersehen, dass nicht die Zeit, sondern der Weg konstant bleibt.

Die aufgeführten Beispiele sollen zeigen, dass mathematisches Verständnis nicht auf die Operation mit Zahlen und Formeln reduziert werden kann, sondern sich vor allem darin ausdrückt, sprachlich gespeichertes Situationswissen in Formeln zu übersetzen. Dies wird besonders beim Lösen von Textaufgaben deutlich.

2 Die mathematische Modellierung von Situationen

Insbesondere durch die Arbeiten zum Lösen mathematischer Textaufgaben konnte die Psychologie einen substantiellen Beitrag zur Erklärung der Schwierigkeiten beim Lernen von Mathematik leisten. In einem Aufsatz von Kintsch und Greeno (1985) standen 14 einfache Textaufgaben im Mittelpunkt, die mit Gleichungen wie $8 - 3 = 5$ oder $5 + 3 = 8$ gelöst werden konnten. Trotzdem gab es massive Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Aufgaben. Die Austauschaufgabe

Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?

wird von über 90 % der Zweitklässler gelöst, während die Vergleichsaufgabe

Maria hat 8 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?

nur von 20 % der gleichen Kinder korrekt bearbeitet wird.

Für Aufgaben zur Kombination von Mengen

Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?

liegt der Anteil der gelösten Aufgaben bei 50 %.

Die Diskrepanz in der Lösungsrate zwischen Aufgaben mit isomorpher mathematischer Struktur wird bei folgender Aufgabe besonders offensichtlich:

5 Vögel haben Hunger. Sie finden 3 Würmer. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?

wird von 80 % der Vorschulkinder gelöst. Endet die Aufgabe hingegen mit der Frage

Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?

liegt selbst bei Drittklässlern die Lösungsrate unter 30 %.

Ein defizitäres Sprachverständnis sowie mangelndes konzeptuelles mathematisches Wissen lassen Kinder an bestimmten Aufgaben scheitern (Kintsch, 1998). Um Vergleichsaufgaben zu lösen, benötigt man ein fortgeschrittenes Zahlverständnis, das über die Zählfunktion von Zahlen hinausgeht (Stern, 1993, 1998; Stern & Lehrndorfer, 1992). Die im Satz

Hans hat 5 Murmeln mehr als Peter

gegebene Information bezeichnet keine konkrete, existierende Menge, sondern beschreibt die *Relation* zwischen zwei Mengen. Man muss ein mentales Modell – also eine von den konkreten Dingen abstrahierte geistige Vorstellung – von der in der Textaufgabe beschriebenen Situation entwickeln. Wer beispielsweise mit der Zahl 5 lediglich 5 Gegenstände verbindet, der wird den Satz nicht verstehen. Wer hingegen *5* als einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl versteht, der die Relation zwischen zwei anderen Zahlen markiert – z.B. zwischen *2* und *7* oder zwischen *4* und *9* –, der kann Vergleichsaufgaben verstehen. Textaufgaben zum quantitativen Vergleich sind ein guter Indikator für ein fortgeschrittenes mathematisches Verständnis im Grundschulalter. Wie inflexibel das konzeptuelle Verständnis von Zahlen noch sein kann, zeigt eine Studie von Stern (1993), die im Kasten dargestellt ist.

Auch das Wissen über Multiplikation und Division lässt sich nicht auf die Operation mit Zahlen reduzieren, sondern erfordert Situationsverständnis. Klassifikationssysteme für Textaufgaben wurden

Warum ist der quantitative Vergleich von Mengen für Grundschulkinder so schwer zu verstehen?

Dass sich Textaufgaben mit gleicher formaler Struktur massiv in der Schwierigkeit unterscheiden, zeigt sich auch bei Textaufgaben zum quantitativen Vergleich. Bei Grundschulkindern liegen die Lösungsraten für Aufgaben mit unbekannter Referenzmenge um etwa 0,3 niedriger als für Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge.

Unbekannte Vergleichsmenge: *Im Zoo gibt es 5 Tiger. Es gibt 3 Löwen weniger (mehr) als es Tiger gibt. Wie viele Löwen gibt es?* Unbekannte Referenzmenge: *Im Zoo gibt es 5 Tiger. Es gibt 3 Tiger mehr (weniger) als es Löwen gibt. Wie viele Löwen gibt es?*

Eine einfache Erklärung könnte sein, dass Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge mit Schlüsselwortstrategien gelöst werden können, auch wenn sie nicht verstanden wurden. Kommt das Wort „mehr" vor, muss addiert werden, während bei „weniger" subtrahiert werden muss. Bei Aufgaben mit unbekannter Referenzmenge ist es genau umgekehrt. Bei Stern (1993) wurde jedoch gezeigt, dass diese einfache Erklärung nicht zutrifft. Ob eine Textaufgabe tatsächlich verstanden wurde, wird überprüft, indem man sich die Aufgabe nacherzählen lässt. Dabei wird angenommen, dass eine Speicherung der sprachlichen Oberflächeninformation ohne Verständnis der zugrundeliegenden Struktur die Arbeitsspeicherkapazität überschreitet. Tatsächlich zeigte sich in mehreren Untersuchungen, dass die Leistungen im Nacherzählen von Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge deutlich besser waren als bei unbekannter Referenzmenge. Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge sind leichter zu verstehen, weil sie den Aufbau eines mentalen Modells erlauben, bei dem bereits nach dem Lesen des zweiten Satzes der Menge der Tiger eine Menge von Löwen gegenüber gestellt werden kann. Um ein derartiges Modell auch bei Aufgaben mit unbekannter Referenzmenge konstruieren zu können, müsste man diese zunächst in Aufgaben mit unbekannter Vergleichmenge transformieren. Das aber gelingt jüngeren Grundschulkindern noch nicht.

- **Stichprobe und Vorgehen.** In einer Studie mit 47 Erstklässlern wurde nach tiefer liegenden Gründen gesucht. Den Kindern wurde eine kurze Geschichte über ein Geschwisterpaar Peter und Susanne erzählt, die einen Bauernhof besuchen. Dabei wurde ein Bild mit *6 Kühen und 4 Schweinen* gezeigt. Anschließend wurde den Versuchskindern eine Liste mit Aussagen von Peter und Susanne über die Differenz zwischen der Menge der Schweine und der Kühe vorgegeben, z.B.
  Peter: *„Es gibt 2 Schweine weniger als Kühe."*
  Susanne: *„Es gibt 2 Kühe mehr als Schweine."*
  Die Kinder sollten die Richtigkeit dieser Aussagen beurteilen, indem sie ankreuzen sollten, wer recht hat: Peter, Susanne, beide, keiner von beiden. Es wurden insgesamt zehn Aussagenpaare vorgegeben, die sich auf die Differenz zwischen den Mengen bezogen. Bei zwei der Aussagenpaare hatten beide Kinder recht, bei zwei Paaren hatten beide Kinder unrecht, und bei sechs Paaren hatte das erste Kind recht und das zweite unrecht. Wenn die Kinder noch nicht wissen, dass man die Differenz zwischen zwei Mengen sowohl mit „mehr" als auch mit „weniger" ausdrücken kann, sollten sie besonders schlecht bei der Beurteilung von Aussagenpaaren abschneiden, in denen beide Kinder recht hatten.
- **Ergebnis.** Nur 36 % der Kinder antworten korrekt, wenn beide Aussagen richtig sind, während alle anderen Aufgaben von über 60 % der Schüler gelöst werden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Lösungsrate bei der Beurteilung zweier korrekter Aussagen zur Differenz deutlich niedriger liegt als die Lösungsrate bei den anderen Aussagenpaaren.
- **Kommentar.** Die mangelnde Flexibilität in der sprachlichen Beschreibung quantitativer Differenzen macht es der Mehrzahl der Erstklässler unmöglich, Aufgaben mit unbekannter Referenzmenge in die mathematisch weniger anspruchsvollen Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge umzuwandeln. Warum verstehen die Kinder nicht, dass sich die Aussagen *Es gibt 2 Schweine weniger als Kühe* und *Es gibt 2 Kühe mehr als Schweine* entsprechen? Die Kinder haben offensichtlich „mehr" und „weniger" als Gegensätze repräsentiert, weil die mathematischen Operationen „Addition" und „Subtraktion" nicht als komplementäre Operationen verstanden wurden.

von Greer (1987), Nesher (1988, 1992) und Vergnaud (1983, 1988) erarbeitet. Wie bei Additions- und Subtraktionsaufgaben gibt es auch hier große Differenzen in den Schwierigkeiten der Aufgabentypen.

Bei Aufgaben vom Typ „Gleichverteilung", wie z.B.

Es gibt 5 Kinder. Jedes Kind soll 4 Kekse bekommen. Wie viele Kekse werden benötigt?

kann Multiplikation als wiederholte Addition aufgefasst werden. Die entsprechende Divisionsaufgabe

20 Kekse sollen unter 5 Kinder zu gleichen Teilen verteilt werden. Wie viele Kekse bekommt jedes Kind?

basiert auf dem einfachen Problemmodell der sukzessiven Korrespondenz, das den Kindern früh vertraut ist: in der ersten Runde wird jedem Kind ein Keks zugeordnet, in der zweiten Runde ein weiterer, usw. Beide Aufgabentypen können bereits von Erstklässlern gelöst werden.

Größere Schwierigkeiten treten hingegen bei Aufgaben zum multiplikativen Vergleich auf, wie z.B.

Hans hat 12 Kekse. Peter hat doppelt (halb) so viele Kekse wie Hans. Wie viele Kekse hat Peter?

Aufgaben, denen das Kartesische Produkt zugrunde liegt, wie z.B.

Es gibt 4 Wege von A nach B und 3 Wege von B nach C. Wie viele Wege gibt es von A nach C, die über B führen?

bereiten Kindern noch in der sechsten Klasse Schwierigkeiten (Nesher, 1988). Die Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Aufgabentypen sind ähnlich wie bei Additions- und Subtraktionsaufgaben damit zu erklären, dass die mathematische Modellierung der jeweiligen Situationen „Gleichverteilung", „Multiplikativer Vergleich" und „Kartesisches Produkt" unterschiedliche Anforderungen an das mathematische Wissen stellt. Der Situation „Gleichverteilung" liegt die wiederholte Addition bzw. die sukzessive Zuordnung von Objekten zu Subjekten zugrunde. Aufgaben zum multiplikativen Vergleich erfordern nach Nesher (1988, 1992) ein „Beziehungsmodell": der Multiplikator beschreibt die Beziehung zwischen zwei Mengen. Aufgaben zum Kartesischen Produkt verlangen ein mathematisches Modell, in dem jedes Element mit jedem verbunden wird, dasselbe Modell also, welches auch der Matrizenrechnung zugrunde liegt.

In den Schulbüchern und im Unterricht dominieren jedoch Gleichverteilungsaufgaben (Nesher, 1992; Vergnaud, 1992). Die Beschränkung auf diesen Aufgabentyp kann zu einem eingeschränkten Verständnis von Multiplikation und Division führen, was sich erst beim Rechnen mit rationalen Zahlen zeigt. Mit der Repräsentation von Multiplikation als wiederholter Addition und Division als sukzessiver Zuordnung gehen die Vorstellungen einher, dass das Ergebnis einer Multiplikation immer größer ist als deren Multiplikatoren und dass ein Quotient kleiner ist als dessen Dividend, was tatsächlich allerdings nur für Zahlen größer als 1 gilt. Die in Gleichverteilungsaufgaben geschilderten Situationen ergeben nur mit natürlichen Zahlen einen Sinn. Aufgaben zum multiplikativen Vergleich hingegen können auch rationale Zahlen enthalten. Nesher (1992) konnte zeigen, dass Kinder, die in der Grundschulzeit vorwiegend mit Aufteilungstextaufgaben konfrontiert wurden, später große Schwierigkeiten mit dem Rechnen von Brüchen hatten, während Kinder, die in der Grundschule Vergleichsaufgaben gerechnet hatten, diese Schwierigkeiten in weitaus geringerem Maße hatten.

Dass auch Algebraaufgaben bei gleicher formaler Struktur unterschiedlich schwer sein können, wurde bei Bassok und Holyoak (1989) verdeutlicht. Mathematisch überdurchschnittlich leistungsstarke Neuntklässler zeigten keinen spontanen → Transfer der Lösungsstrategien von der Aufgabe

Ein Schnellzug fährt 3 Sekunden nach dem Start 30 Stundenkilometer (a1). Danach nimmt die Geschwindigkeit konstant um 5 Stundenkilometer pro Sekunde (d) zu. Wie schnell wird der Zug nach 9 Sekunden fahren?

auf die Aufgabe

Ein Junge bekommt an seinem sechsten Geburtstag ein wöchentliches Taschengeld von 50 Cents (a1). An jedem folgenden Geburtstag wird sein Taschengeld um 25 Cents (d) erhöht. Wie hoch wird sein wöchentliches Taschengeld an seinem 15. Geburtstag sein?

Nach Greeno, Smith und Moore (1993) ist der ausbleibende Transfer damit zu erklären, dass in der Zugaufgabe kontinuierliche und in der Taschengeldaufgabe diskrete Größen vorkommen. Diskrete Größen können in kontinuierliche Größen umgewandelt werden, während der umgekehrte Vorgang keinen Sinn macht. Die Versuchspersonen interpretieren die Aufgabe mit den kontinuierlichen Größen als einen Spezialfall der Aufgabe mit diskreten Größen (Stern, 2001). Es zeigt sich also auch für die Sekundarstufe, dass das Situationsmodell einen Einfluss auf das mathematische Verständnis hat.

3 Konzeptuelles und prozedurales Wissen als Grundlage mathematischer Kompetenzen

Die Unterscheidung zwischen schnell und effizient anwendbarem Handlungswissen einerseits und konzeptuellem Tiefenverständnis andererseits eignet sich besonders gut zur Charakterisierung mathematischer Kompetenzen. Dies kommt sowohl bei der von Gelman und Gallistel (1978) vorgenommenen Unterscheidung zwischen „skills" und „principles" als auch in der bei Resnick (1992) zu findenden Aufteilung in syntaktisches und semantisches Wissen über Rechenoperationen zum Ausdruck. Inzwischen wird die in der Kognitionspsychologie übliche Unterscheidung zwischen *konzeptuellem* und *prozeduralem Wissen* zur Beschreibung der Grundlagen mathematischer Kompetenzen herangezogen (z.B. Baroody, 2003; Hiebert, 1986; Siegler, 2003).

Konzeptuelles Wissen wird dabei als Netzwerk flexibel miteinander kombinierbarer Chunks oder Schemata beschrieben, deren Inhalt bewusstseinsfähig und damit auch verbalisierbar ist. Die Verbindungen zwischen den Wisseneinheiten sind symmetrisch. Sie können durch Elaboration eigenen Vorwissens gewonnen werden, ebenso wie durch Rezeption von Instruktionen oder Lösungsbeispielen. Weil konzeptuelles Wissen einer bewussten Elaboration zugänglich ist, kann sein Inhalt flexibel transformiert und so auf neue Inhaltsbereiche übertragen werden.

Prozedurales Wissen wird als Ansammlung isolierter Produktionsregeln beschrieben, die jeweils unflexibel, aber dafür automatisiert ablaufende Verhaltensprogramme darstellen, die durch ausdauernde Übung erworben werden. Weil sie dem bewussten Denken nur rudimentär zugänglich sind, lässt sich ihr Inhalt schlecht verbalisieren oder durch höhere mentale Prozesse transformieren.

Prozedurales Wissen betrifft die Ausführung von Rechenoperationen (Zehnerübergang bei der schriftlichen Subtraktion, Dreisatz), während konzeptuelles Wissen das Verstehen von Prinzipien impliziert, z.B. dass bei der Division mit Zahlen kleiner 1 das Ergebnis größer wird.

Baroody (2003) gibt einen Überblick über die verschiedenen Rollen, die der Unterscheidung in den Unterrichtswissenschaften zugewiesen wurden. Er zeichnet nach, wie zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine Debatte darüber entbrannte, worauf der Unterrichtsschwerpunkt grundsätzlich liegen sollte – auf prozeduralen Fähigkeiten oder auf konzeptuellem Verständnis – und beschreibt, dass heute zwar Einigkeit darüber herrscht, dass Schüler beides erwerben und zueinander in Beziehung setzen können sollten, dass andererseits jedoch unklar ist, wie dieses Ziel in der Praxis am besten zu erreichen sei – vor allem darum, weil bisher ungeklärt ist, wie sich konzeptuelles und prozedurales Wissen gegenseitig beeinflussen.

Rittle-Johnson, Siegler und Alibali (2001) heben die drei prominentesten Positionen zu diesem Thema hervor:

(1) *Concepts-first*-Theorien gehen davon aus, dass Kinder beim Wissenserwerb in einer Domäne anfangs auf ihr konzeptuelles Wissen zurückgreifen, das sie beispielsweise durch verbale Instruktionen oder Literaturstudium erworben haben können bzw. das teilweise sogar angeboren sein kann. Im Zug der Wissensanwendung und der gezielten Übung leiten sie dann nach und nach prozedurales Wissen daraus ab.

(2) *Procedures-first*-Theorien postulieren, dass Kinder zuerst durch „trial and error learning" oder durch Nachahmung erfolgreicher Personen in ihrer Umwelt prozedurales Wissen erwerben und aus diesem Handlungswissen dann nach und nach durch Reflektion und „representational redescription" im Sinne von Karmiloff-Smith (1992) konzeptuelles Wissen abstrahieren.

(3) Einem dritten Ansatz zufolge interagieren die Wissensarten auf Grundlage bidirektionaler Prozesse miteinander, so dass ein Zuwachs in der einen Wissensart letztendlich auch zu einem Zuwachs in der anderen Wissensart führen.

M

Rittle-Johnson und Siegler (1998) geben einen Literaturüberblick über die empirische Forschung zu diesem Gebiet. In ihrer Einleitung merken sie an, dass – verglichen mit anderen psychologischen Forschungsfeldern – nur wenig gesicherte empirische Befunde vorliegen. Diese wurden vor allem in verschiedenen Teildomänen der Mathematik gewonnen, so dass Rittle-Johnson und Siegler ihren Überblick auf diese Inhaltsbereiche beschränken. Die empirischen Befunde selbst sind sehr heterogen. Entwicklungspsychologische Studien zeigen, dass sich in einigen mathematischen Domänen (Zählen, Multiplikation von Brüchen, proportionales Denken) Prozeduren vor Konzepten entwickeln, während in anderen (Addition einstelliger Zahlen, Addition von Brüchen) Konzepte vor Prozeduren auftreten. Im Bereich des Rechnens mit mehrstelligen Zahlen waren die Ergebnisse uneinheitlich. Rittle-Johnson und Siegler hoben hervor, dass die Relationen zwischen den beiden Wissensarten sowohl innerhalb von Personen und Domänen als auch zwischen ihnen stark zu variieren scheinen.

Wie ergänzen sich konzeptuelles und prozedurales Wissen im Umgang mit Dezimalbrüchen?

Wie können Schüler Wissen aufbauen, das herangezogen werden kann, wenn entschieden werden muss, ob die Zahl *0,25* größer oder kleiner ist als die Zahl *0,1234*? Müssen sie ein abstraktes Konzept von Dezimalzahl haben, oder kann ein konzeptuelles Verständnis überhaupt erst aus einer vorhandenen Handlungskompetenz in einer Domäne erwachsen? Rittle-Johnson et al. (2001) postulieren ihr *iteratives Modell*, demzufolge ein Zuwachs in einer der beiden Wissensarten nachfolgend auch zu einem Zuwachs in der jeweils anderen führt. Um diese Annahme zu überprüfen, führten sie folgendes Experiment durch.

- **Stichprobe und Vorgehen.** Fünft- und Sechstklässler spielten allein am Computer das „Fang-das-Monster"-Spiel: Ihnen wurde pro Aufgabe ein Dezimalbruch zusammen mit einem Zahlenstrahl gezeigt, und ihnen wurde gesagt, an der Stelle des Zahlenstrahls, die mit dem Dezimalbruch bezeichnet ist, verstecke sich ein Monster. Dieses sollten sie fangen, indem sie mit der Maus auf die entsprechende Stelle klicken. Nach jedem Mausklick erschien das Monster an der korrekten Stelle und gab so eine Rückmeldung über die richtige Antwort. Die Kinder sollten jeweils auch Erklärungen über die Lage des Monsters generieren. Vor und nach dem Spiel wurden das konzeptuelle und das prozedurale Wissen der Schülerreho-ben. Das prozedurale Wissen wurde dabei durch Routineaufgaben gemessen, die jeweils die Positionierung eines Dezimalbruches auf dem Zahlenstrahl erforderten. Das konzeptuelle Wissen wurde erhoben, indem den Kindern ihnen bis dahin unbekannte Transferaufgaben präsentiert wurden (→ Tansfer). Beispielsweise hatten sie einen Dezimalbruch aufzuschreiben, der zwischen zwei vorgegebenen anderen lag. Hinter dieser Testaufgabenauswahl steht die Annahme, dass Kinder ihr prozedurales Wissen benutzen, um ihnen bekannte Routineprobleme zu lösen, jedoch auf ihr konzeptuelles Wissen zurückgreifen müssen, wenn sie neue Lösungswege für Transferprobleme entwickeln.
- **Ergebnis.** Das Spiel führt zu einem Anstieg beider Wissensarten. Die Kinder besitzen anfangs schon einiges konzeptuelles Wissen, jedoch kaum prozedurales. Das Ausmaß beider Wissensarten ist vor und nach dem Spiel positiv korreliert. Interessant ist, dass das konzeptuelle Wissen im Prätest vorhersagt, wieviel prozedurales Wissen die Kinder während des Spiels erwerben. Dieser Zuwachs an prozeduralem Wissen sagt wiederum vorher, wieviel konzeptuelles Wissen ein Kind durch das Spiel gewinnt.
- **Kommentar.** Rittle-Johnson et al. sehen in den Resultaten eine Bestätigung ihrer Annahmen: Konzeptuelles und prozedurales Wissen in einem mathematischen Inhaltsbereich scheinen sich einander gegenseitig positiv zu beeinflussen.

Einer der wenigen stabilen Befunde ist die positive intrapersonale Korrelation zwischen beiden Wissensarten, die vermuten lässt, dass beide nicht unabhängig voneinander sind, wie die im folgenden Kasten dargestellte Studie zeigt.

4 Individuelle Voraussetzungen und schulische Fördermöglichkeiten

Intelligenzquotient. Obwohl IQ und Mathematikleistung hoch korrelieren, können Unterschiede in der allgemeinen Intelligenz (→ Intelligenz und Begabung) die Variation in der Mathematikleistung doch nur teilweise erklären. So zeigen Ergebnisse der Münchener LOGIK-Studie, dass sich die spätere Mathematikleistung bereits von der frühen Grundschule an aufgrund des mathematischen Vorwissens besser vorhersagen lässt als aufgrund der allgemeinen Intelligenz. So war die Korrelation zwischen dem Lösen konzeptuell anspruchsvoller Mathematikaufgaben in der 2. Klasse und der Mathematikleistung in Klasse 11 höher als die Korrelation zwischen der am gleichen Tag gemessenen Intelligenz und der Mathematikleistung in Klasse 11 (Stern, 2003a, b). Der Mathematiktest der 2. Klasse bestand aus Arithmetikaufgaben, die auf der Grundlage von konzeptuellem Wissen leichter gelöst werden konnten, sowie aus mathematischen Textaufgaben zum quantitativen Vergleich, die sich erst auf der Grundlage eines abstrakteren Zahlverständnisses lösen lassen (Stern, 1998). Diese Ergebnisse sprechen dafür, dass die Grundlagen für die Entwicklung interindividueller Unterschiede im mathematischen Verständnis auch im „Normalbereich" bereits früh gelegt werden.

Räumlich-visuelles Vorstellungsvermögen. Welche spezifischen kognitiven Voraussetzungen bringen Menschen mit, die gute Mathematikleistungen zeigen? Unbestritten ist, dass spezifische Fähigkeitsunterschiede, insbesondere im räumlich-visuellen Vorstellungsvermögen, den Erwerb mathematischer Kompetenzen beeinflussen. So ist die Vorstellung von Zahlen eng an den Raum gebunden. Die Annahme, dass größere Mengen mehr Raum einnehmen als kleinere Mengen, dominiert in den ersten Jahren das Zahlverständnis der Kinder und führt zu typischen Fehlern bei den Invarianzaufgaben, die schon von Piaget beschrieben wurden. Das räumlich-visuelle Vorstellungsvermögen stellt somit eine wichtige Basisressource mathematischen Denkens dar (s. Geary, 1996; Stern & Hardy, 2004). So ist rein mathematisch-numerisches Operieren – z.B. durch Faktenabruf beim Rechnen oder durch das Denken in Formeln – erst bei einem hohen Grad an → Expertise eine effiziente Lösungsmethode. Im Wissenserwerbsprozess dagegen sollte auch auf visuell-räumliche bzw. visuell-graphische Repräsentationen anstelle der rein symbolischen Bezug genommen werden, um abstrakte mathematische Konzepte zu vermitteln.

Kulturvergleichende Unterrichtstudien zeigen, dass in den bezüglich der Mathematikleistung erfolgreichen ostasiatischen Ländern schon früh graphisch-visuelle Veranschaulichungen bei Textaufgaben genutzt werden (Fuson & Kwon, 1992; → Visuelles Lernen). Dies setzt sich bei linearen Funktionen fort, wie folgende im japanischen Mathematikunterricht häufig benutzte Aufgabe zeigt, die sehr einfach zu lösen ist, wenn sie in einem Koordinatensystem (siehe Abb. 1) visuell veranschaulicht wird: *Vor einem Monat kam die Mutter von Ichiro ins Krankenhaus. Ichiro hatte sich entschlossen, zusammen mit seinem kleineren Bruder jeden Morgen in einem nahegelegenen Tempel für die Gesundheit der Mutter zu beten und dabei jedes Mal etwas Geld zu spenden. Es gab achtzehn Zehn-Yen Münzen in Ichiros Geldbeutel und zweiundzwanzig Fünf-Yen Münzen im Geldbeutel des kleinen Bruders. Jeder der beiden Jungen nahm nach dem Gebet im Tempel eine Münze aus seinem Geldbeutel und legte sie in den Opferkasten. Beide Jungen wollten so lange beten, bis ihre Geldbeutel leer waren. Eines Tages schauten sich die Brüder, nachdem sie ihr Gebet beendet hatten, gegenseitig in ihre Geldbeutel und sahen, dass die Geldmenge im Geldbeutel des kleineren Bruders größer war als die im Geldbeutel von Ichiro. Vor wie vielen Tagen hatten die beiden Jungen angefangen zu beten?*

Auch Tabellen oder die bildliche Darstellung der Münzen und sukzessives Auskreuzen ausgegebener Münzen können zu einer Lösung führen. Welche Missverständnisse bei Schülern auftreten, in deren Unterricht der Graph einer linearen Funktion zwar behandelt wurde, aber nicht als Denkwerkzeug

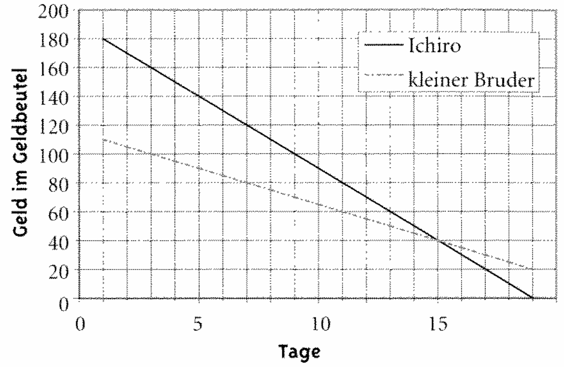

Abbildung 1. Visuelle Repräsentation der Aufgabe im Koordinatensystem

genutzt wurde, zeigen Studien von Leinhardt, Zaslavsky und Stein (1991). Bei Felbrich (2005) und bei Koerber (2003) wird das Verständnis von Graphen aus kognitionspsychologischer Sicht analysiert, und es werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie bereits in der Grundschule und der frühen Sekundarstufe die Fundamente dafür gelegt werden können, dass Graphen und andere Visualisierungen als Denk- und Modellierungswerkzeuge in flexibler Weise genutzt werden.

Literatur

Einführende Literatur

- Dehaene, S. (1997). The number sense. New York/ Cambridge: Oxford University Press/Penguin.
- Stern, E. (1998). Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich: Pabst.

Weiterführende Literatur

- Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In J. Kilpatrick, W.B. Martin & D.E. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 219–233). Reston, VA: National Counsil of Teachers of Mathematics.

Zitierte Literatur

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Bassok, M. & Holyoak, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 15, 153–166.

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (2000). Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band I: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Opladen: Leske + Budrich.

Felbrich, A. (2005). Kontrastierungen als effektive Lerngelegenheiten zur Vermittlung von Wissen über Repräsentationsformen am Beispiel des Graphen einer linearen Funktion. Unveröff. Dissertation. Berlin: Technische Universität

Fuson, K.C. & Kwon, Y. (1992). Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds.), Pathways to number. Children's developing numerical abilities (pp. 283–306). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Geary, D.C. (1996). Sexual selection and sex differences in mathematical abilities. Behavioral and Brain Sciences, 19, 229–284.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Greeno, J.G., Smith, D.R. & Moore, C.(1993). Transfer of situated learning. In D.K. Detterman & R.J. Sternberg (Eds.), Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction (pp. 1–24). Norwood, NJ: Ablex.

Greer, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. In J. Sloboda & D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 60–80). Oxford: Clarendon Press.

Hiebert, J. (Ed.)(1986). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Huth, K. (2004). Entwicklung und Evaluation von fehlerspezifischem informativem tutoriellem Feedback (ITF) für die schriftliche Subtraktion. Unveröff. Dissertation. Dresden: Technische Universität.

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond modularity. A developmental perspective on cognitive science. Cambridge, MA: MIT Press.

Kintsch, W. (1998). Comprehension. A paradigm for cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

Kintsch, W. & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92, 109–129.

Koerber, S. (2003). Visualisierung als Werkzeug im Mathematik-Unterricht. Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter. Hamburg: Kovac.

Law, D.J., Pellegrino, J.W. & Hunt, E.B. (1993). Comparing the tortoise and the hare: Gender differences and experience in dynamic spatial reasoning tasks. Psychological Science, 4, 35–40.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. Review of Educational Research, 60, 1–64.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 19–40). Hillsdale, NJ/Reston, VA: Erbaum/ National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching (p. 189–219). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching (pp. 373–429). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), The development of mathematical skills (pp. 75–328). Hove: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S. & Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93, 346–362.

Staub, F.C. & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. Journal of Educational Psychology, 93, 144–155.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? Journal of Educational Psychology, 85, 7–23.

Stern, E. (2001). Intelligenz, Wissen, Transfer und der Umgang mit Zeichensystemen. In E. Stern & J. Guthke (Hrsg.), Perspektiven der Intelligenzforschung (S. 163–204). Lengerich: Pabst.

Stern, E. (2003a). Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben in der Grundschule. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen (S. 116–130). Beltz: Weinheim.

Stern, E. (2003b). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), Entwicklung, Lehren und Lernen: Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert (S. 207–217). Göttingen: Hogrefe.

Stern, E., & Hardy, I. (2004). Differentielle Psychologie des Lernens in Schule und Ausbildung. In K. Pawlik (Hrsg.), Theorien und Anwendungen der Differentiellen Psychologie (S. 573–618). Göttingen: Hogrefe.

Stern, E. & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. Cognitive Development, 7, 259–268.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127–174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141–161). Reston, VA/Hillsdale, NJ: National Council of Teachers of Mathematics/Lawrence Erlbaum.

Wynn, K. (1992). Addition und subtraction by human infants. Nature, 358, 749–750.

Mehrebenenanalyse

Oliver Lüdtke • Olaf Köller

1 Einleitung

Menschliches Erleben und Verhalten findet oft in sozialen Kontexten statt, und es ist das Zusammenspiel von Personmerkmalen und Situationscharakteristika, das in diesen Kontexten handlungsleitend ist. Diese von einer ökologischen Perspektive beeinflusste Sichtweise trifft in besonderem Maße für die pädagogisch-psychologische Forschung zu, in der häufig die Schule (→ Schuleffekte) bzw. Klasse die Umwelt darstellt, die es bei der Beantwortung von Fragestellungen mit einzubeziehen gilt (→ Schul- und Klassenklima). Als Konsequenz daraus besitzen die in der pädagogisch-psychologischen Forschung erhobenen Datensätze häufig eine Mehrebenenstruktur, in der Schüler innerhalb von Klassen und Klassen innerhalb von Schulen geschachtelt sind. Zur adäquaten Analyse solcher hierarchischer Datenstrukturen hat sich die Mehrebenenanalyse (engl. „multilevel analysis") durchgesetzt, insbesondere ist hier der Ansatz des hierarchisch-linearen Modellierens (engl. „hierarchical linear modeling" HLM, vgl. Raudenbush & Bryk, 2002) zu nennen).