"Auf den Schultern von Giganten" Zur Geschichte der Mathematischen Optimierung [1]

R. Tichatschke

Wie viele Gebiete der Mathematik nimmt die Mathematische Optimierung ihren Anfang in angewandten Fragestellungen. Aber im Gegensatz zu anderen Zweigen der Mathematik, müssen wir nicht allzu weit in zurückliegende Jahrhunderte gehen, um ihre Wurzeln zu finden. Der historische Baum der Mathematischen Optimierung, von seinen konzeptionellen Wurzeln bis zu seiner gegenwärtigen Ausprägung ist bemerkenswert kurz, und wir können mit ISAAK NEWTON sagen:

"Wir stehen auf den Schultern von Giganten."

Ziel dieses Vortrags ist das historische Wachsen der Mathematischen Optimierung von ihren Anfängen bis zu den 70-er Jahren des vorigen Jahrhunderts zu beleuchten und dabei einige ihrer grundsätzlichen Ideen zu erläutern. Es soll aufgezeigt werden, dass Optimierung als ein natürliches Denkschema erscheint, das Extremalprinzipien folgt.

1 Die Giganten

Beginnen wir mit LEONHARD EULER.

Leonhard Euler (1707-1783)

1727: Daniel Bernoulli beruft Euler an die Universität Sankt Petersburg.

Mitglied der St. Petersburger Akademie und ab 1741 der Preußischen Akademie der Wissenschaften.

1744: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*.
(*Eine Methode, um Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder die Lösung des Isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird.*)
In diesem Werk begründet er in systematischer Weise die Variationsrechnung.

[1] Vortrag anlässlich des Jahres der Mathematik 2008 an der Universität Trier

Er ist der produktivste Mathematiker aller Zeiten, (seine gesammelten Werke umfassen 72 Bände) und er erfasste den Sinn der Optimierung als einer der Ersten. Er schrieb [31]:
"Was immer in der Welt passiert, in seinem Inneren hat es die Bedeutung von Maximum oder Minimum. Somit ist kein Zweifel, dass alle Naturphänomene über die Methode des Maximierens oder Minimierens erklärt werden können."

Es ist nicht überraschend, warum Optimierung als ein natürliches Denkschema erscheint. Tausende von Jahren haben die Menschen nach Lösungen gesucht für Probleme, die einen minimalen Aufwand und/oder einen maximalen Ertrag erforderten. Diese Suche hat u.a. auch zu einem Wachsen der Zweige der Mathematik insgesamt beigetragen; mehr noch, den Gedanken des Optimierens findet man heute auch in vielen anderen Wissenschaftsdisziplinen.

Zurück zu EULER. Er lieferte wichtige Beiträge auf dem Gebiet der Optimierung, sowohl in der Theorie als auch in den Methoden. Seine Charakterisierung von optimalen Lösungen, also die Beschreibungen von notwendigen Optimalitätsbedingungen, begründet u.a. die *Variationsrechnung*. Hierbei geht es um Aufgaben, bei denen eine oder mehrere unbekannte Funktionen so zu bestimmen sind, dass ein gegebenes, von der Wahl dieser Funktionen abhängiges, bestimmtes Integral seinen größten oder kleinsten Wert annimmt.

$$\int_{t_0}^{t_1} L(y(t), y'(t), t)dt = \min, \qquad y(t_0) = a,\ y(t_1) = b. \tag{1}$$

Ein Beispiel für ein solches Problem ist das *Brachistochronenproblem*:

Problem: *Gesucht wird die Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit vom Punkt A zum Punkt B bewegt*:

$$\mathcal{J}(y) := \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}}dx \ \rightarrow\ \min, \qquad y(0) = 0,\ y(a) = -h.$$

Dieses Problem wurde schon 1696 von JOHANN BERNOULLI formuliert, und es ist bekannt, dass er mit seinem Bruder JACOB BERNOULLI Zeit seines Lebens darüber stritt, wer von ihnen die richtige Lösung für dieses Problem besitzt. 1744 gibt Euler darauf die Antwort, indem er folgenden Satz beweist:

Theorem
Ist $y = y(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$, eine C^2-Lösung des Minimumproblems (1), dann gilt die Euler-Gleichung:

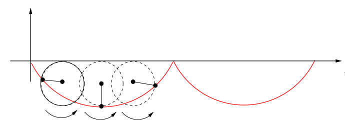
$$\frac{d}{dt}L_{y'} - L_y = 0.$$

Im Fall der Brachistochrone hat sie folgende konkrete Form, da L nicht von der Zeit t abhängt:

$$\frac{d}{dt}(y'L_{y'} - L) = 0.$$

Löst man diese Differentialgleichung, so erhält man als gesuchte Kurve einen Zykloidenbogen.

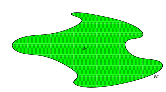
Lösung:
$x(t) = c_1 + c(t - \sin t); \quad y(t) = c(1 - \cos t).$
$0 \leq t \leq t^*.$



Die Konstanten c, c_1 und t^* sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.
Die Zykloide beschreibt den Tatbestand der Tautochronie, d.h., wenn man voraussetzt, dass Luftwiderstand und Reibung zu vernachlässigen sind, so gelangt ein frei beweglicher Massenpunkt vom Startpunkt A auf der Zykloide in kürzester Zeit an den tiefsten Punkt B.

EULER verwendete als einer der Ersten auch *Methoden der diskreten Approximation* zur Lösung von Variationsproblemen. Damit löste er z. B. das *Isoperimetrische Problem*:

Problem: *Unter allen geschlossenen Kurven K der Länge L, die die Fläche F umschließen, ist diejenige gesucht, die diese Fläche F maximiert.*



Lösung: K - Kreis vom Umfang L.

In der heutigen Sprache der Optimierung kann man diese Aufgabe als ein Problem unter einer Nebenbedingung verstehen, da die Länge L als vorgegebene Restriktion auftritt.
Mehr als 200 Jahre später bezeichnete C. CARATHÉODORY (1873-1950) [12] die Eulersche Variationsrechnung als "eines der schönsten mathematischen Werke, das je geschrieben worden ist".

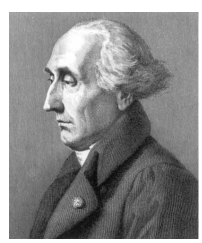
Im Jahre 1762 vereinfachte LAGRANGE die Eulersche Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingung und war damit in der Lage, diese auf Funktionen mehrerer Variabler zu verallgemeinern (Euler-Lagrange-Gleichung) [66], [67].

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

1755: Professor für Mathematik an der Königlichen Artillerieschule in Turin.

1757: gehört er zu den Gründern der Turiner Akademie der Wissenschaften.

1766: Direktor der Preußischen Akademie der Wissenschaften Berlin und Nachfolger Eulers.



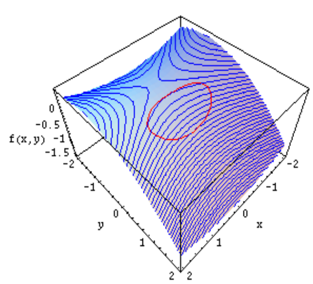
Vollender des Gebäudes der Newtonschen Mechanik, Arbeiten zur Himmelsmechanik, zur Algebra und Zahlentheorie.

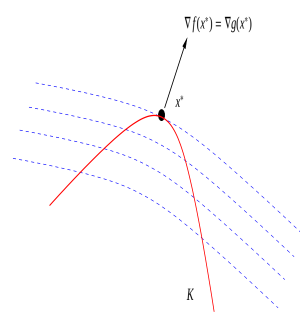
1762: *Variationsrechnung mehrerer Variabler*,
1788: *Méchanique analytique*.

Ausgangspunkt waren für ihn die Bewegungsgleichungen der Mechanik. Hat man es mit der Bewegung von Massenpunkten auf Kurven oder Flächen zu tun, dann muss man in den Newtonschen Bewegungsgleichungen Zwangskräfte hinzufügen, die das Teilchen auf der Kurve oder der Fläche halten. Dieser Apparat ist schwerfällig. Nach der genialen Idee von Lagrange ist es viel eleganter, durch die Einführung eines geeigneten Koordinatensystems die Nebenbedingungen vollständig zu eliminieren. Die Newtonschen Gleichungen der Mechanik – *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* – lassen sich nicht auf weiterführende physikalische Theorien verallgemeinern (z.B. Elektrodynamik, allgemeine Relativitätstheorie, Elementarteilchentheorie usw.). Dagegen lässt sich der Zugang von Lagrange auf alle Feldtheorien der Physik verallgemeinern. Das zugehörige Variationsproblem heißt *Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung*, das nach WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) benannt wurde. Es ist ein Extremalprinzip und stellt eine Verallgemeinerung verschiedener physikalischer Beobachtungen dar. PIERRE LOUIS MAUPERTUIS sprach 1746 als erster von einem allgemein gültigen Prinzip der Natur, extremal oder optimal abzulaufen. Beispielsweise folgt eine rollende Kugel immer der steilsten Neigung, ein Temperaturunterschied in einem Körper verursacht eine Wärmeströmung in Richtung der tiefsten Temperatur oder ein Lichtstrahl durch unterschiedliche Medien nimmt immer den Weg, der die geringste Laufzeit bedeutet (*Fermatsches Prinzip*).
EULER UND LAGRANGE trugen wesentlich zur mathematischen Formulierung dieser Gedanken bei. CARL GUSTAV JAKOB JACOBI (1804-1851) schreibt dazu [46]: " Indem Lagrange die Eulersche Methode der Variationsrechnung verallgemeinerte, entdeckte er, wie man in einer einzigen Zeile die Grundgleichung für alle Probleme der analytischen Mechanik aufschreiben kann".

Lagrangesches Prinzip:

$$\text{extr}\,\{f(x) : g(x) = 0\} \quad \rightsquigarrow \quad L(x,\lambda) := f(x) + \lambda g(x) \;\rightarrow\; \text{extr}_{(x,\lambda)\in\mathbb{R}^{n+1}}$$





Beim Überqueren der Niveaulinien verändert sich der Zielfunktionswert, er wird (lokal) extremal sein, wenn die Kurve K eine Niveaulinie tangential berührt, d.h. die Tangenten beider Kurven fallen in x^* zusammen, somit sind ihre Stellungsvektoren ∇f und ∇g kollinear in x^*:

Euler-Lagrange Formalismus: x^* ist Lösung $\quad\Rightarrow\quad \exists\,\lambda^*$:

$$\begin{aligned} L_x(x^*,\lambda^*) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x^*) + \lambda^*\nabla g(x^*) = 0,\\ L_\lambda(x^*,\lambda^*) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad g(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Diese Betrachtungsweise von LAGRANGE vereinfachte die Beschreibung vieler physikalischer Probleme. Heute ist dieser Formalismus ein klassisches Werkzeug der Optimierung und findet überall da Anwendung, wo Extrema unter Restriktionen in Gleichungsform bestimmt werden.

Dies ist zweifelsfrei der Platz, wo nochmals vermerkt werden muss, dass die Euler-Lagrangeschen Gleichungen eine notwendige Bedingung für eine optimale Kurve oder einen optimalen Punkt darstellen. Allerdings bei ihrer Anwendung traten historisch viele Fehler auf, die Jahrzehnte lang zu Irrtümern führten.
Es ist wie mit PERRON'S PARADOXON:

Sei N die größte positive ganze Zahl. Für $N \neq 1$ gilt dann $N^2 > N$. Das steht im Widerspruch dazu, dass N die größte Zahl ist.
Implikation: $N = 1$ ist die größte ganze Zahl.

Implikationen wie in diesem Paradoxon sind verheerend, gleichwohl wurden sie oft gemacht, z.B. in der elementaren Algebra bei den Griechen, wo Probleme gelöst wurden beginnend mit der Phrase: " Sei x die gesuchte Quantität".

In der Variationsrechnung gehört die Euler Gleichung zu den sogenannten *notwendigen Bedingungen*. Sie wurde nach dem gleichen Argumentmuster erhalten, wie in Perron's Paradoxon. Die Grundvoraussetzung, dass eine Lösung existiert, wird dann benutzt, um eine Lösung zu berechnen, deren Existenz postuliert wird. In der Klasse der Probleme, in der diese Grundvoraussetzung gilt, ist nichts Falsches an einem solchen Tun. Aber welches ist genau die Problemklasse, die das erlaubt? Woher wissen wir, dass ein konkretes Problem dieser Klasse angehört? Die sogenannten notwendigen Bedingungen beantworten nicht diese Frage. Folglich, eine "Lösung", die erhalten wird durch die notwendigen Bedingungen, ist einfach noch keine Lösung, sie ist nur ein Kandidat für eine Lösung.

Es ist verwunderlich, dass ein so elementarer Punkt der Logik sehr lange unbeachtet blieb. Der Erste, der die Euler-Lagrange Methode kritisierte, war KARL WEIERSTRASS (1815-1897), fast ein Jahrhundert später. Selbst GEORG RIEMANN (1826-1866) machte dieselbe ungerechtfertigte Voraussetzung in seinem berühmten Dirichlet Prinzip (vgl. [37]).

Während damals das Lösen verschiedener Typen von *Gleichungen* ein zentraler Gegenstand der Mathematik war, ja man war geradezu darauf erpicht, eindeutige Lösungen zu finden, rief das Lösen von *Ungleichungen* nur ein marginales Interesse hervor, insbesondere dem Lösen von Ungleichungen auf algorithmische Weise wurde so gut wie keine Aufmerksamkeit geschenkt.

Als einer der Ersten beschrieb FOURIER [36] eine systematische Eliminationsmethode zur Lösung von linearen Ungleichungen, ähnlich - aber in ihrer Ausführung viel komplizierter - als die Gauss-Eliminationsmethode, welche schon 300 Jahre zuvor den

Chinesen geläufig war, ohne dass CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) davon wusste.

Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830)

1797: Professor für Analysis und Mechanik an der École Polytechnique, als Nachfolger von Lagrange.

1832: *Théorie analytique de la chaleur*.
(Analytische Theorie der Wärme).

Erste systematische Begründung der Fourierreihen und Fourierintegrale zur Lösung von Differentialgleichungen.

Er ist namentlich auf dem Eiffelturm in Paris verewigt.

1802 wurde Fourier von Napoleon zum Präfekten des Departements Isère ernannt. In dieser Funktion sorgte er für die Trockenlegung der Sümpfe bei Lyon. 1815 ernannte ihn Napoleon (nach dessen Rückkehr von Elba) zum Präfekten des Departements Rhône. Er war Sekretär der Französischen Akademie der Wissenschaften auf Lebenszeit.

Unter den wenigen, die sich mit Ungleichungssystemen beschäftigten, war auch der in Klausenburg (Rumänien) gebürtige FARKAS, der lineare Ungleichungen in der Mechanik untersuchte und dabei alternative Sätze für deren Lösbarkeit studierte [32].
Diese Ergebnisse erwiesen sich ca. 40 Jahre später als sehr hilfreich in der Polyedergeometrie und Dualitätstheorie der linearen Optimierung, da die zulässigen Bereiche linearer Optimierungsprobleme genau diese polyedrale Struktur aufweisen.

Julius Farkas (1847-1930)

1887: Professor in Kolozsvár (Rumänien)

1902: *Grundsatz der einfachen Ungleichungen*,
J. f. Reine und Angew. Math. 124, 1-27.

Theorem: Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \{u \in \mathbb{R}^m : u \geq 0,\ A^T u \geq 0,\ u^T b < 0\} = \emptyset,$$

d.h. von beiden linearen Ungleichungssystemen ist stets genau eines lösbar.

Im Zusammenhang mit linearen Ungleichungssystemen ist auch MINKOWSKI zu nennen, der lineare Ungleichungen für seine bemerkenswerte Geometrie der Zahlen brauchte und zusammen mit HERMANN WEYL (1885-1955) über den strukturellen Aufbau der Polyeder nachdachte [74].

Herman Minkowski (1864-1909)

1892: Assistenzprofessor Universität Bonn,

1894: Professor in Königsberg und ab 1896 am Polytechnikum Zürich, wo Albert Einstein zu seinen Schülern zählte.

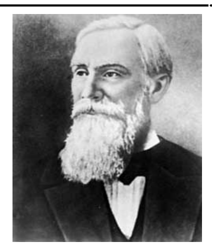
- Geometrie der Zahlen,
- Geometrisierung der speziellen Relativitätstheorie,
- Theorie der konvexen Körper.

Theorem: *Sei P eine polyedrische Menge, L_P sein Lineality-Raum und $P^0 = P \cap L_P^{\perp}$. Bezeichne $S = \{x^1, ..., x^q\}$ die Extremalpunkte und $T = \{y^1, ..., y^r\}$ die Extremalrichtungen von P^0. Dann gilt*

$$P = L_P + conv(S) + cone(T).$$

Zu den Wurzeln der Optimierungstheorie gehören auch die Arbeiten von CHEBYSHEV, vielen von uns bekannt u.a. durch das *Chebyshev-Approximationsproblem*.

Pafnuti Lwowitsch Chebyshev (1821-1894)



1850: außerordentlicher Professor in St. Petersburg,
1860: ordentlicher Professor.

Grundlegende Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie und Approximationstheorie.

Chebyshev-Problem: (nichtglattes Optimierungsproblem)

$$\min_x \max_{t \in T} |a(t) - \sum_i x_i f_i(t)|.$$

Analytische Lösungen für $a(t) = 1,\ f_i(t) = t^i,\ T = [0, 1]$ sind die *Chebyshev Polynome*.

In seiner einfachsten Formulierung wird die gleichmäßige Approximation einer gegebenen stetigen Kurve $a(t)$ durch ein System von linear unabhängiger Funktionen $f_i(t)$ gesucht.
Mit der heutigen Terminologie würde man sagen, es ist ein Problem der konvexen nicht-glatten Optimierung, oder genauer ein *semi-infinites Problem*. Somit zählt CHEBYSHEV zu den ersten, der Optimierungsprobleme mit nicht-differenzierbaren Funktionen betrachtete. Er hat eine analytische Lösung für einige Spezialfälle gefunden, die als Chebyshev-Polynome bekannt sind.

Wie EULER verstand auch CHEBYSHEV die Signifikanz von Extremalproblemen. Er schreibt [100]: "In allen praktischen Aktivitäten des Menschen ist das gleiche Problem vorzufinden: Wie sind unsere Ressourcen zuzuteilen, so dass so viel Profit wie möglich erreicht wird?"

Zwei Schüler CHEBYSHEV's, MARKOV und LYAPUNOV, setzten die Untersuchungen von Extremalproblemen fort.
MARKOV ist vor allem für die Theorie der stochastischen Prozesse bekannt.

Alexander Alexandrowich Markov (1856-1922)

1886: außerordentlicher Professor an der Universität Sankt Petersburg,

Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften.

Bekannt für seine Arbeiten in Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie (Markov-Ketten, Markov-Prozesse u.a.).

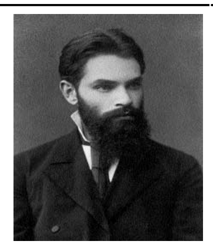
Momenten-Problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_a^b t^n f(t)dt, \\ s.t. \quad & 0 \leq f(t) \leq t, \quad \forall\, t \in [a,b], \\ & \int_a^b t^i f(t)dt = c_i, \quad i = 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

1913 betrachtete er Buchstaben-Sequenzen in Romanen, um die Notwendigkeit der Unabhängigkeit für das Gesetz der großen Zahlen nachzuweisen. Aus diesem Ansatz erwuchs ein allgemeines statistisches Werkzeug, der sogenannte *stochastische Markow-Prozess*, aus dem sich zukünftige Entwicklungen auf Grundlage des gegenwärtigen Wissens bestimmen lassen. MARKOV studierte unter anderem aber auch sogenannte *Momentenprobleme* zur Optimierung von Kenngrößen einer Verteilungsfunktion oder einer Zufallsvariablen [1], [63]. Es kann als ein restringiertes Optimierungsproblem mit Integralfunktionen formuliert werden, d.h im Unterschied zur Variationsrechnung tauchen hier keine Ableitungen auf.

Auf den ersten Blick sind LYAPUNOV's Untersuchungen nicht mit Optimierung verbunden, da er die Stabilitätstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen untersuchte [89].

Alexander Michailowich Lyapunov (1857-1918)



1885: Privatdozent an der Charkower Universität,

- Begründer der Stabilitätstheorie für Differentialgleichungen.

Theorem: *Die Lösung $x(t)$ der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist stabil, falls eine Funktion $V(x)$ (Lyapunov Funktion) existiert, so dass*

$$(\nabla V(x), f(x)) < 0.$$

Wir können darauf einen umgekehrten Blick werfen und das Resultat wie folgt interpretieren: Die obige Differentialgleichung ist eine zeit-stetige Methode zur Minimierung der Lyapunov-Funktion $V(x)$. Heute liefert die *Lyapunov-Methode* ein systematisches Werkzeug für die Konvergenz- und Stabilitätsuntersuchungen numerischer Methoden in der Optimierung.

2 Die Pioniere der Linearen Optimierung

Es gibt zwei isolierte, frühe Beiträge zur Linearen Optimierung, die auf GASPARD MONGE [75] und CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN [86] zurückgehen.

Gaspard Monge (1746-1818)

1765: Professor für Mathematik und 1771 für Physik in Mézières,
1780: Professor für Hydrodynamik in Paris,
1794: Begründer der École Polytechnique in Paris.

1782: *Stetiger Massentransport unter minimalen Kosten*, in: *Application de l'analyse à la géometrie*, Paris.

MONGE wurde 1780 in die Französische Akademie der Wissenschaften aufgenommen und erhielt die Professur für Hydrodynamik. Als 1789 die Französische Revolution begann, unterstützte er sie und wurde bei Ausrufen der Republik 1792 Marineminister und musste in dieser Funktion das Todesurteil an König Ludwig XVI mitverantworten. Außer durch mehrere physikalische Entdeckungen (Theorie der Luftspiegelungen), hat er sich namentlich durch die Schöpfung der darstellenden (deskriptiven) Geometrie verdient gemacht. Dazu gehörte auch seine Arbeit zum stetigen Massentransport, vom Ideengehalt eine frühe Arbeit zum linearen Transportproblem.

Die zweite Quelle geht auf VALLÉE POUSSIN zurück.

C.J. de la Valée Poussin (1866-1962)
1892: Professor für Mathematik in Löwen,

- *Sure la méthode de l'approximation minimum*,
  Anales de la Societé Scientifique de Bruxelles, No 35, 1911, pp. 1-16.

1920: Erster Präsident der Internationalen Mathematischen Union.

In den Jahren 1892-94 besuchte er die Vorlesungen von CAMILLE JORDAN, HENRI POINCARÉ, ÉMILE PICARD in Paris und von AMANDUS SCHWARZ, FERDINAND FROBENIUS in Berlin.
Mit seiner Arbeit aus dem Jahr 1911 in den Annalen der Brüsseler Societé Scientifique wird auch er zu den Begründern der Optimierung gerechnet.

Bezüglich der Beiträge von MONGE und VALLÉE POUSSIN schreibt DANTZIG 1991 [71], (Seite 19): "Ihre Arbeiten hatten genau so viel Einfluss auf die Entwicklungen der Linearen Optimierung der 40-er Jahre, als würde man in einer ägyptischen Pyramide einen elektronischen Computer finden, der 3000 vor Christus gebaut wurde".

Erst in den 40-er Jahren des vorigen Jahrhunderts begann sich die Optimierung, wie wir sie heute verstehen, ernsthaft zu entwickeln und wiederum waren es praktische Fragestellungen, die die Richtungen dieser Entwicklung bestimmten. Man kann sagen, dass wahrscheinlich die Zeit reif war für die einsetzende rasante Entwicklung.

In der Community der Optimierer werden anerkanntermaßen drei Pioniere benannt: KANTOROVICH, DANTZIG und KOOPMANS.

Koopmans, Dantzig, Kantorovich (Laxenburg, 1976)

KANTOROVICH löste 1939 erstmals eine Aufgabe der Linearen Optimierung. Allerdings wurde zu jener Zeit die Bedeutung dieser Arbeit nicht in vollem Umfang erkannt.

Mitte der 1940-er Jahre wurde DANTZIG bewusst, dass sich viele praktische ökonomische Beschränkungen bei der Modellierung von Planungsaufgaben durch lineare Ungleichungen beschreiben lassen und er ersetzte erstmals die bis dahin vorherrschenden "Faustregeln" zur Lösung von Planungsproblemen ganz bewusst durch eine (lineare) Zielfunktion und (lineare) Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und Ungleichungen. Insbesondere etablierte er damit eine klare Trennung zwischen dem Ziel der Optimierung, der Menge der zulässigen Lösungen und - durch die Beschreibung der Simplex-Methode - den Mitteln zur Lösung des Problems.

KOOPMANS war ein US-amerikanischer Ökonom und Physiker niederländischer Abstammung, der sich mit Problemen der Ressourcenaufteilung befasste.

KANTOROVICH studierte von 1926 bis 1930 Mathematik an der Leningrader Universität. Mit 18 Jahren promovierte er und mit 22 Jahren wurde er zum Professor ernannt. Der Doktorgrad wurde ihm allerdings erst 1935 verliehen, nachdem wieder akademische Titel eingeführt wurden [69]. In den 40-er Jahren kam es zu einer raschen Entwicklung der Funktionalanalysis. Hier sind die Namen von HILBERT, BANACH, STEINHAUS, MASUR aber auch KANTOROVICH zu nennen. Das Verdienst des Letzteren bestand in jener Zeit insbesondere darin, dass er Brücken zwischen der Funktionalanalysis, der Optimierung und der numerischen Mathematik schlug.

Leonid Vitalevich Kantorovich (1912-1986)

1934: Professor an der Universität Leningrad

- Lineare Optimierung (1939),
- Optimalitätsbedingungen für Extremalprobleme in topologischen Vektorräumen (1940),
- Funktionalanalytische Begründung von Abstiegsverfahren,
  Konvergenz des Newton-Verfahrens für Funktionalgleichungen (1939-1948).

1939: *Mathematical Methods for Production Organization and Planning*, Leningrad, 66 Seiten.
1940: *On an efficient method for solving some classes of extremum problems*, DAN SSSR 28.
1959: *Functional Analysis*, Moscow, Nauka.

Ende der 30-er Jahre war er mit der mathematischen Modellierung der Produktion einer Furnierholzfabrik befasst und entwickelte eine Methode, die später als äquivalent zur Simplex-Methode erkannt wurde. 1939 publizierte er ein kleines Buch (nur 66 Seiten) [49], dessen Titel in der deutschen Übersetzung lautet: ”Eine mathematische Methode der Produktionsplanung und Organisation und des besten Gebrauchs von ökonomischen Betriebsmitteln.” Der Terminus *Linejnaja Optimizacija - Lineare Optimierung* fällt auf keiner Seite dieses Buches.

Im Gegensatz zur Publizität der Ergebnisse von DANTZIG in der westlichen Welt hatte das kleine Buch KANTOROVICH’s nur wenig Widerhall bei den Mathematikern und Ökonomen im Osten gefunden. Die westliche Welt, bedingt durch den eisernen Vorhang, erhielt davon ohnehin keine Kenntnis, und in der Sowjetunion gab es dafür wohl zwei Gründe. Erstens, da war kein echter Bedarf für mathematische Methoden in einem totalitären System. Obwohl theoretisch die zentrale Planung der nationalen Ökonomie im Vordergrund aller gesellschaftlichen Prozesse stand, war das System wesentlich auf Administration und Planung begründet. Zweitens ist zu nennen, dass dieses Buch nicht als üblicher mathematischer Text geschrieben war, somit sahen die Mathematiker keine

Veranlassung, es zu lesen.
Sein wirklich bekannt gewordenes Buch [53] über Lineare Optimierung publizierte er 1960 (mit einem Anhang von G.S. RUBINSTEIN), nachdem die wesentlichen Entwicklungen schon im Westen abgeschlossen waren. Es enthält zwei Anhänge, wo die mathematische Theorie der Linearen Optimierung und numerische Methoden beschrieben werden. Kurioserweise, um der Marxistischen Ideologie gerecht zu werden, werden darin die *duale Variable* als *objektiv-begründete Voranschläge* und nicht als *Preise* bezeichnet, denn nach dem sowjetischen Denken hatten Preise sich nicht auf dem Markt durchzusetzen, sondern wurden vom Politbüro festgelegt.
Wie schon erwähnt, erzielte KANTOROVICH aber auch signifikante Beiträge in der Funktionalanalysis [51], [52]. Seine funktional-analytischen Methoden in der Optimierung sind wohl bekannt und enthalten Ideen und Techniken, die ca. 30 Jahre vor der Ausarbeitung der *Theorie der konvexen Analysis* entstanden. Das belegt u.a. das hier aufgezeigte Resultat über notwendige Optimalitätsbedingungen von Extremalproblemen in topologischen Räumen [50].

Problem: (P) $\min_{x \in Q} f(x)$,
wobei f differenzierbar sei in einem topologischen Raum X;
$Q \subset X$ Menge, die eine konvexe Kegelapproximation K in einem Punkt $x^* \in Q$ erlaubt.

Theorem (Notwendige Optimalitätsbedingung)
Falls x^* ein Minimalpunkt von (P), so gilt $\nabla f(x^*) \in K^*$, (K^* - dualer Kegel zu K).

1975 erhielt er zusammen mit KOOPMANS den Nobelpreis für Ökonomie. Zitat aus der Begründung der Preisverleihung: "Für die Beiträge zur Theorie der optimalen Zuteilung von Betriebsmitteln".

Tjalling Charles Koopmans (1910-1985)

1948: Professor an der Yale University,

1968: Professor an der Stanford University.

1942: *Exchange Ratios between Cargoes on Various Routes (Non-Refrigerated Dry Cargoes)*, Memorandum for the Combined Shipping Adjustment Board, Washington, D.C.
1951: *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York.
1971: *On the Description and Comparison of Economic Systems*, (with J. Michael Montias) in: Comparison of Economic Systems, Univ. of California Press, 1971, pp. 27-78.

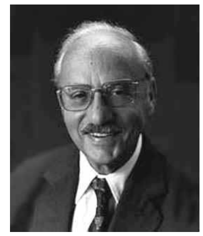
Koopmans war höchst verärgert, dass DANTZIG nicht an dem Preis teilhaben konnte.

DANTZIG studierte Mathematik an den Universitäten Maryland und Michigan, da ihm seine Eltern kein Studium an einer angeseheneren Universität finanzieren konnten. 1936 machte er seinen B.A. in Mathematik und Physik und ging zu einem weiterführenden Studium mit dem Ziel der Promotion an die *University of Michigan*. Dieses beendete er 1937 zunächst nur mit einem M.A. in Mathematik. Das Promotionsstudium schloss er nicht an, da ihm die abstrakte Mathematik, wie er sagte, nicht lag.

Georg B. Dantzig (1914-2005)

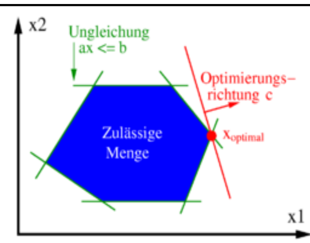
1960 Professor an der University of California, Berkeley,

1966 Professor an der Stanford University.



1966: *Linear Programming and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin.
1966: *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
1969: *Lectures in Differential Equations*, mit A. Aziz, Van Nostrand, Reinhold Co., New York.

Nachdem er zwei Jahre als Statistiker bei der *RAND Corporation* in Washington gearbeitet hatte, begann er 1939 ein Promotionsstudium an der *University of California, Berkeley*, welches er jedoch wegen des Eintritts der USA in den Zweiten Weltkrieg erneut unterbrach. Er trat in die *Air Force* ein, wo er von 1941 bis 1946 Leiter der *Combat Analysis Branch* im Headquarter der US-Air Force war. 1946 nahm er sein Promotionsstudium wieder auf und promovierte bei ALBERT TUCKER. Anschließend arbeitete er als mathematischer Berater beim Verteidigungsministerium.



Den Durchbruch für die Lineare Optimierung schaffte DANTZIG 1947 mit einer Arbeit unter dem Titel: *Programming in a linear Structure*. Man kann bei DANTZIG nachlesen [71], Seite 29, dass im Sommer 1948 KOOPMANS ihm vorschlug, einen kürzeren Titel zu verwenden, nämlich den Terminus *Linear Programming (LP)*. Der Begriff *Simplex Method* geht auf eine Diskussion von DANTZIG mit MOTZKIN zurück, der der Meinung war, dass Simplex-Methode am besten die Geometrie des Wechselns von einer Polyederecke zur nächsten beschreibt.

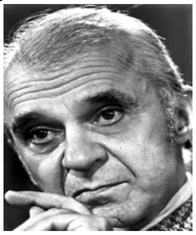
1949, exakt zwei Jahre nach der ersten Veröffentlichung des Simplex-Algorithmus, wurde in Chicago eine erste *Conference on Mathematical Programming* von KOOPMANS organisiert, die später als die ”Nullte” bezeichnet wurde, in einer Reihe von *Mathematical Programming Conferences*, die bis heute stattfinden. Neben so bekannten Ökonomen, wie ARROW, SAMUELSON, HURWITZ UND DORFMAN, nahmen Mathematiker, wie ALBERT TUCKER, HEROLD KUHN, DAVID GALE, JOHANN VON NEUMANN, TOMAS MOTZKIN u.a. teil.

1960 erhielt DANTZIG eine Professur an der *University of California at Berkeley* und wechselte dann 1966 auf eine Professur für Operations Research and Computer Science an die *Stanford-University*. Im Jahre 1973 war er Mitbegründer und erster Präsident der *Mathematical Programming Society* (MPS). Nach ihm wurde später der von der MPS vergebene Dantzig-Preis benannt. Die erste Ausgabe des *SIAM Journal on Optimization* 1991 war George Dantzig gewidmet.

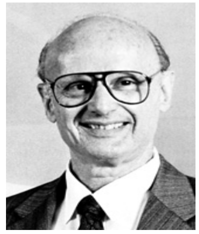
Zurück zur Nobel-Preis-Verleihung für KOOPMANS und KANTOROVICH. 1975 verlieh die Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften den Preis für Ökonomie zu gleichen Teilen an KANTOROVICH und KOOPMANS für deren Beiträge zur optimalen Ressourcenverteilung. Das Preisgeld in jenem Jahr betrug 240.000 US-Dollar. Unmittelbar nach der Preisverleihung reiste KOOPMANS nach Laxenburg in Österreich an das *IIASA* (The International Institute for Applied Systems Analysis). Man kann bei MICHEL BALINSKI [71], Seite 12, dem damaligen Direktor des IIASA, nachlesen, dass dort anlässlich eines zeremoniellen Meetings, KOOPMANS 40.000 $ von seinem Preisgeld als Geschenk an das IIASA überreichte. Somit hat er in der Tat nur ein Drittel des gesamtem Preisgeldes für sich akzeptiert.

Es war lange nicht klar, ob es KANTOROVICH erlaubt sein würde, diesen Preis anzunehmen, denn als einige Jahre zuvor BORIS PASTERNAK (bekannt für seinen Roman ”Doktor Shiwago”) die Ehre zuteil wurde, hatten ihn sowjetische Behörden gezwungen, die Ehrung abzulehnen. Auch die Nobel-Preisverleihung an den Physiker ANDREJ SACHAROV, einem der führenden sowjetischen Dissidenten jener Zeit, wurde als unfreundlicher politischer Akt angesehen. Da man SACHAROV aber nicht davon abbringen konnte diese Ehrung anzunehmen, verweigerte man ihm die Reise nach Stockholm und er wurde aus der Akademie der Sowjetischen Wissenschaften ausgeschlossen. Es ist bekannt, dass KANTOROVICH, zusammen mit einigen Physikern, gegen diesen Ausschluss gestimmt haben.

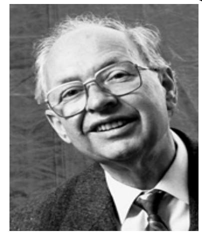
Es ist sicher interessant zu vermerken, dass zum Themenkreis ”Linear Programming” und ”Operations Research” im weitesten Sinn fünf weitere Ökonomie-Nobel-Preise verliehen wurden: 1976 an WASILI LEONTIEV (Input-Output-Analyse), 1990 an HARRY MARKOWITZ (Entwicklung der Theorie der Portfolio-Auswahl), 1994 an REINHARD SELTEN und JOHN NASH (Analyse des Gleichgewichts in nicht-kooperativer Spieltheorie) und 2007 an LEONID HURWICZ (Entwicklung der Grundlagen des ökonomischen Designs). HURWICZ war zum Zeitpunkt der Verleihung mit 90 Jahren der bis dahin älteste Preisträger.
Einen Überblick über die Entwicklung des Operations Research findet man in [38].



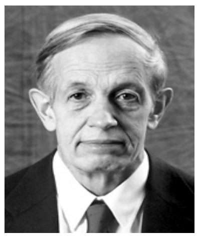
Wasili Leontiev
(1976)



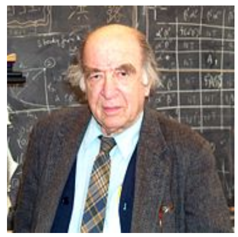
Harry Marcowitz
(1990)



Reinhard Selten
(1994)



John F. Nash
(1994)



Leonid Hurwicz
(2007)

Nun zu einem kleinen Abstecher in die Spieltheorie und seinem Begründer JOHANN VON NEUMANN . Er erbrachte auf vielen Gebieten der Mathematik herausragende Beiträge.

Johann von Neumann (1903-1957)

1926-1929: Privatdozent an der Berliner Universität,
1933-1957: Professor am Institute for Advanced Studies, Princeton,
1943: Mitarbeit am Manhattan-Projekt in Los Alamos.

- Quantenmechanik,
- Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen,
- Theorie der Schockwellen,
- Rechnerarchitektur (Daten und Programm binär codiert im selben Speicher).

1928: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. 100, 295-320.
1944: *The Theory of Games and Economic Behavior*, Springer.

Schon 1928 hatte ihn ein Aufsatz des Mathematikers ÉMILE BOREL (1871-1956) über Minimax-Eigenschaften zu Ideen geführt, die später auf einen seiner originellsten Entwürfe hinausliefen, der Spieltheorie. Im gleichen Jahr bewies er das Minimax-Theorem [76] über die Existenz einer optimalen Strategie in einem *Nullsummenspiel*. Mit dem Wirtschaftswissenschaftler OSKAR MORGENSTERN schrieb er 1944 das zum Klassiker gewordene Buch "The Theory of Games and Economic Behavior" [77], wo auch die für die Ökonomie wichtige Verallgemeinerung auf n-Personen Spiele ($n > 2$) behandelt wird. Er wurde damit zum Begründer der Spieltheorie, die er allerdings weniger auf klassische Salon-Spiele anwendete, als vielmehr auf alltägliche Konflikt- und Entscheidungssituationen bei unvollkommener Kenntnis der Absichten des Gegenspielers.

Als am 7.12.1941 in Pearl Harbor die japanische Luftwaffe große Teile der amerikanischen Pazifikflotte versenkte, war dies die Geburtsstunde der Anwendung der Spieltheorie für militärische Zwecke. Aus der Analyse des Debakels wurde klar, dass die spieltheoretisch begründeten Empfehlungen, die eine Expertengruppe den Militärs gegeben hatten, durch das Pentagon verworfen worden waren. Das gab der Spieltheorie einen außerordentlichen Aufschwung und noch heute unterliegt die mathematische Forschung auf spieltheoretischem Gebiet in großen Teilen der Geheimhaltung.

3 Die Anfänge der nichtlinearen Optimierung

In den 50-er Jahren entwickelten sich neben der Linearen Optimierung weitere Forschungsrichtungen auf dem Gebiet der Extremalprobleme, die wir heute unter dem Schlagwort *Mathematical Programming* zusammenfassen.

Im Falle von Gleichheitsrestriktionen wurde schon vermerkt, dass die Optimalitätsbedingungen auf EULER und LAGRANGE zurückgehen. Nichtlineare Ungleichungsrestriktionen wurden erstmals 1914 von BOLZA [10] und 1939 von KARUSH [56] ins Kalkül gezogen, leider gerieten diese Resultate für lange Zeit in Vergessenheit.

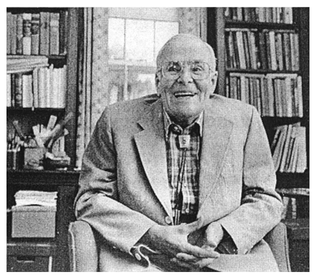
O. Bolza:
1914: Über Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen,
Mathem. Abhandlungen 1-18.
W. Karush:
1939: Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions,
MSc Thesis, Univ. of Chicago.
F. John:
1948: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions,
Studies and Essays, Presented to R. Courant on his 60th Birthday, Jan. 1948,
Interscience, New York, 187-204.
M. Slater:
1950: *Lagrange Multipliers Revisited*, Cowles Commisssion Discussion Paper, No 403.

1948 betrachtete FRITZ JOHN [47] ebenfalls Probleme mit nichtlinearen Ungleichungsrestriktionen. Er setzte keine *constraint qualifications* voraus, bis auf den Fakt, dass alle Funktionen stetig differenzierbar sind.
Der Terminus *constraint qualification* geht auf KUHN UND TUCKER [65] zurück und besagt – und darin liegt die besondere Schwierigkeit der Behandlung von Problemen mit nichtlinearen Ungleichungsrestriktionen – , dass eine adäquate lokale Approximation des zulässigen Bereichs gesichert wird (mathematisch: Linearisierungskegel und Tangentialkegel müssen zusammenfallen).
Die Erörterung der historischen Entwicklung der *constraint qualification* würde hier jetzt zu weit führen. Es sei aber auf eine frühe Arbeit von MORTON SLATER [93] hingewiesen, der eine elegante Bedingung gefunden hat, die hinreichend für einen Sattelpunkt ist, ohne die Differenzierbarkeit der Sattelfunktion zu implizieren.

Bei der Entwicklung der Theorie der nichtlinearen Optimierung spielte TUCKER eine herausragende Rolle.

Albert W. Tucker (1905-1995)
1933: Professor an der Princeton University.

- Topologie,
- Mathematical programming (Duality theory),
- Game Theory (Prisoner's Lemma).



Afternoon tea club:
J. Alexander, A. Church, A. Einstein, L. Eisenhart, S. Lefschetz, J.v. Neumann, O. Veblen, H. Weyl, E. Wigner, A. Turing, u.a.

TUCKER graduierte 1932 und war seit 1933 Mitglied des Mathematik-Departments der Princeton Universität und in den 50-er und 60-er Jahren ein sehr erfolgreicher Chairman dieses Departments. Er ist bekannt für seine Arbeiten zur Dualitätstheorie der linearen und nichtlinearen Optimierung, aber ebenso zur Spieltheorie. Er kreierte das bekannte Prisoner Dilemma, ein Bimatrix-Spiel mit nichtkonstanter Gewinnsumme.

Seine berühmtesten Schüler waren wie gesagt DANTZIG, KUHN und NASH (Nobel-Preis 1994). Die *Mathematical Programming Society* vergibt jedes Jahr den Tucker-Preis für eine überragende studentische Leistung.

In den 30-er Jahren war das Department in Princeton berühmt für seine Teenachmittage, die bekannte Wissenschaftler zusammenführte und zu inspirierenden Diskussionen Anlass gab. Hierzu gehörten auch ALBERT EINSTEIN, JOHANN V. NEUMANN, HERMANN WEYL und anfangs auch der Engländer ALAN TURING, ein Schüler des Logikers ALONZO CHURCH, der während des 2. Weltkrieges den Deutschen Funk-Code "ENIGMA" knackte und später an der Universität von Manchester die *Turing-Maschine* erfand. TURING wurde später in England wegen seiner Homosexualität gesellschaftlich geschnitten und verübte Selbstmord.

Das Verdienst von ALBERT TUCKER und seinem Schüler HEROLD KUHN besteht darin, dass sie 1951 eine Verallgemeinerung der Multiplikator-Regel von LAGRANGE auf Probleme mit Ungleichungsrestriktionen fanden [64].

H.W. Kuhn and A.W. Tucker:
1951: Nonlinear programming,
Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathem. Statistics and Probability,
Univ. of California Press, Berkeley, 481-492.

$$(P) \quad \begin{cases} f(x) \to min, x \in \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \leq 0, \quad (i = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

$$(S) \qquad \exists\, \tilde{x} \text{ mit } g_i(\tilde{x}) < 0 \; \forall\, i = 1, \cdots, m$$

Theorem: (Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung)
In (P) seien $f,\ g_i,\ (i = 1, \cdots, m)$ konvex und die Slater-Bedingung (S) sei erfüllt. Dann gilt:

$$x^* \textit{ ist globaler Minimalpunkt von } (P) \Leftrightarrow \exists \quad \begin{array}{l} \lambda_i^* \geq 0 \; (i = 1, \cdots, m), \textit{ so dass} \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \; (i = 1, \cdots, m), \\ L(x, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

wobei $\lambda^* \in \mathbb{R}^m_+$ - (Lagrange-Multiplikator zu x^*);
$g(x) = [g_1(x), \cdots, g_m(x)]^T$;
$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle$ - (Lagrange-Funktion).

1957: Linear and nonlinear programming, *Oper. Res. 5*, 244-257.

Beginnend 1948 bis ca. 1972 wurde in Princeton ein Projekt unter der Leitung von TUCKER durch das *Naval Research Office* gesponsert, an dem HAROLD KUHN, DAVID GALE, LLOYD SHAPLEY u.a. beteiligt waren und das u.a. zur Ausarbeitung von Optimalitätsbedingungen für verschiedene Klassen von nichtlinearen Optimierungsproblemen und der Dualitätstheorie für konvexe Optimierungsprobleme führte.

Was die Entwicklung der Linearen Optimierung zu dieser Zeit betrifft, so lag das Hauptaugenmerk in ihrer kommerziellen Anwendung, obwohl es noch keine effektiven Computer gab. Eine der ersten dokumentierten Anwendungen der neuen Methode war das Diäten-Problem von G.J. STIGLER [94], dessen Ziel eine möglichst kostengünstige Nahrungszusammensetzung für Soldaten der US-Army war, die bestimmte Mindest- und Höchstmengen an Vitaminen und anderen Inhaltsstoffen zu gewährleisten hatte. An der optimalen Lösung dieses linearen Programms mit 9 Ungleichungen und 77 Variablen waren damals neun Personen beschäftigt, die zusammen etwa 120 Manntage Rechenarbeit benötigten.

Historischer Überblick über LP-Berechnungen mittels Simplex-Algorithmus auf Computern:
(vgl. [79])

Jahr	Restriktionen	Bemerkung
1951	10	
1954	30	
1957	120	
1960	600	
1963	2 500	
1966	10 000	strukturiert
1975	16 000	
heute	12 000 000	Luftfahrtindustrie

In diesem Zusammenhang kann man bei LILLY LANCASTER [68] folgende Kuriosität nachlesen: Da der Simplex-Algorithmus das Pivoting in Abhängigkeit von den reduzierten Kosten ausführt und der Preis für Gewürze i.d. Regel höher als der Preis für die einzusetzenden Rohstoffe ist, traten die Gewürz-Variablen meist als Nichtbasisvariablen auf, sie wurden also mit dem Wert Null belegt. Das Ergebnis war, dass die Speisen grauenhaft fad schmeckten. In dieser Arbeit wird berichtet, wie man schrittweise das Modell, sprich die Nebenbedingungen änderte, um eine schmackhaftere Kost zu erzielen.

A. Charnes; W.W. Cooper; B. Mellon:
1955: *A model for optimizing production by reference to cost surrogates*,
Econometrica 23, 307-323.
L.M. Lancaster:
1992: The history of the application of mathem. programming to menu planning,
European J. of Oper. Res. 57, 339-347.

1952 gelang es CHARNES, COOPER UND MELLON [13] erfolgreich die Simplexmethode in der Petro-Industrie zur optimalen Spaltung von Erdöl in Benzin und hochwertige Rohöle einzusetzen.

In den 50-er Jahren trat in den USA die Untersuchung von Netzwerk-Fluss-Problemen auf den Plan. Das Verdienst von FORD UND FULKERSON [35] besteht darin, dass sie die Verbindungen zwischen den Flussproblemen und der Graphentheorie untersuchten. Noch heute lebt die kombinatorische Optimierung von diesen Ergebnissen.

1959-60 arbeiteten DANTZIG UND WOLFE [21] über *Dekompositionsprinzipien*, d.h. die Zerlegung von in spezieller Weise strukturierten hochdimensionalen LP's in ein Master- und mehrere Subprobleme. Heutzutage erlauben diese Ideen eine Parallelisierung der Rechenabläufe auf der Ebene der Subprobleme und sichern somit ein sehr schnelles Lösen dieser Probleme mit Hunderttausenden von Variablen und Nebenbedingungen.
Die duale Variante hierzu wurde 1962 von BENDERS [4] zur Lösung des *mixed integer problems* eingesetzt.

Die Untersuchung von *integer programming problems* startete 1958 durch RALPH GOMORY [41]. Völlig verschieden zu den frühen Arbeiten von FULKERSON über den Einsatz von Schnittebenen beim Abschneiden von Touren im *traveling salesman problem* zeigte GOMORY, wie man systematisch Schnittebenen generiert, die im Kontext der Ganzzahligkeit garantieren, dass in einem System linearer Ungleichungen die berechnete optimale Lösung ganzzahlig ist. Heute gehören solche Techniken, die Schnittebenen mit *Branch- and-Bound-Methoden* kombinieren, zu den effizientesten Algorithmen, um angewandte Probleme der ganzzahligen Optimierung zu lösen.

Die erste Publikation zu konjugierten Gradientenmethoden geht auf HESTENES UND STIEFEL [43] zurück. 1952 entwickelten sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines zulässigen Punktes eines Systems linearer Gleichungen und Ungleichungen.

K. Levenberg:
1944: *A method for the solution of certain non-linear problems in least squares*,
Quaterly of Applied Mathem., 2, 164-168.

M. R. Hestenes; E. Stiefel:
1952: *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*,
J. Res. Natl. Bur. Stand. 49, 409-436.

R. Gomory:
1958: Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs,
Bull. Amer. Math. Soc. 64, 275-278.

G.B. Dantzig; Ph. Wolfe:
1960: *Decomposition principle for linear programs*, Oper. Res. 8, 101-111.

J.F. Benders:
1962: *Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*,
Numer. Math. 4, 238-252.

L.R. Ford; D.R. Fulkerson:
1962: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 194 p.

In der Sowjetunion wurden die ersten Ergebnisse zu Matrix-Spielen durch VENTZEL [96] und VOROBYEV [97] veröffentlicht und ein viel gelesenes russisches Lehrbuch über lineare Optimierung wurde von YUDIN UND GOLSTEIN [98] geschrieben.

S.I. Zukhovitzkii:
1956: *On the approximation of real functions in the sense of Chebyshev*,
Uspekhi Matem. Nauk, 11(2), 125-159.

E.S. Ventzel; N.N. Vorobyev:
1959: *Elements of Game Theory*, Moscow, Fizmatgiz.

D. B. Yudin; E.G. Golstein:
1961: *Problems and Methods of Linear Programming*, Moscow, Sov. Radio.

E. Ya. Remez:
1969: *Foundation of Numerical Methods for Chebyshev Approximation*, Kiev, Naukova Dumka.

Etwa zur gleichen Zeit werden auch die Arbeiten zweier Ukrainer, ZUKHOVITSKII [101] und REMEZ [87], bekannt. Sie schlagen Methoden zur Lösung des Best - Approximation - Problems nach Chebyshev vor. Es sind Simplex-ähnliche Algorithmen zur Lösung der sich eigentlich dahinter verbergenden linearen *semi-infiniten Optimierungsaufgabe*.
Die Original-Arbeiten hierzu sind wesentlich älter als hier aufgeführt, z.B. REMEZ's Algorithmus zur numerischen Lösung des Chebyshev-Approximationsproblems wurde 1935 von REMEZ bei einer Sitzung der Mathematischen Abteilung der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen.

Wichtige Ergebnisse auf dem Gebiet der Kontroll-Theorie, also der Optimierung unter Nebenbedingungen, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden, wurden durch die beginnende Raumfahrt initiiert. 1956 war das Jahr, wo die Sowjets den ersten Flugkörper, den *Sputnik*, ins Weltall schossen.

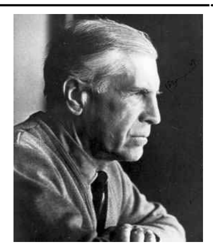
Eines der grundlegenden Optimalsteuerprobleme besteht in der Überführung eines Zustandes $x(t)$, beschrieben durch ein Differentialgleichungssystem, aus einem Start- in einen Zielbereich $\mathcal{T}$, wobei die Steuerung durch eine Kontrollfunktion $u(t)$ aus einer geeigneten Funktionenklasse so erfolgt, dass ein vorgegebenes Kostenfunktional minimal ausfällt.
Ein typisches Problem dieser Art findet man in der Raumfahrt: Der Transfer eines steuerbaren Objekts zu einem Planeten in kürzester Zeit oder zu geringsten Kosten.

Optimalsteuerproblem mit fester Zeit:

$$\begin{aligned} \min \mathcal{I}(x,u) &= \int_0^T f^0(x(t),u(t))dt; \\ \frac{dx}{dt} &= f(x,u), \quad x(0)=x_0,\ x(T) \in \mathcal{T}(T); \\ u(t) &\in U_{ad} = \{u(\cdot):\ \text{meßbar}\ , u(t) \in \Psi \text{ für } t_0 \le t \le t_1\}. \end{aligned}$$

(x - Zustandsvektor, u - Steuervektor, $f = (f^1, ..., f^n)$).

Somit ist wiederum die Frage nach den notwendigen Bedingungen zu stellen, die eine optimale Kontrollfunktion erfüllen muss und es liegt eine starke Analogie zur Variationsrechnung vor. Dort waren die Euler-Lagrangeschen Gleichungen notwendig dafür dass gewisse Funktionen sich als Kandidaten für eine optimale Funktion erwiesen; hier in der Kontroll-Theorie werden die analogen notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine optimale Steuerung durch das *Pontryaginsche Maximumprinzip* beschrieben.



Lew Semenowitsch Pontryagin (1908 - 1988)

1934: Steklov Institut, Moskau,

1935: Leiter der Abteilung Topologie und Funktional Analysis im Steklov Institut.

- Geometrische Aspekte der Topologie,
- Dualitätstheorie der Homologie,
- Kozyklen-Theorie in der Topologie (Pontryagin-Klassen),
- Maximumprinzip.

1956: L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze:
Mathematical Theory of Optimal Processes, Moscow, Nauka.

PONTRYAGIN verlor mit 14 Jahren sein Augenlicht. Nur dank seiner Mutter, die ihm mathematische Bücher vorlas, konnte er trotz seiner Blindheit Mathematiker werden. Ihm verdankt die Mathematik eine Reihe grundlegender Resultate, vor allem in der

Topologie, und sein Exkurs in die angewandte Seite der Mathematik in Form der Steuerprobleme ist eher als Randerscheinung in seinen Forschungen zu bewerten.

Das *Maximumprinzip* wurde zunächst 1954 als These von PONTRYAGIN formuliert und bewiesen und dann 1956 in der gemeinsamen Arbeit mit BOLTYANSKII UND GAMKRELIDZE publiziert [82]. Es ist noch immer grundlegend für die moderne Theorie der Optimalsteuerungen.

Max-Prinzip für ein Optimalsteuerproblem mit fester Zeit:

Führen duale Zustandsvariablen (Lagrange-Multiplikatoren) $\lambda_0(t), \ldots, \lambda_n(t)$ ein und betrachten die *Hamilton-Funktion*

$$H(\lambda, x, u) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t) f^i(x(t), u(t))$$

und das adjungierte System (für einen zul. Prozess $x(t), u(t)$ $(0 \le t \le T)$)

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} = -\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \frac{\partial f^i(x, u)}{\partial x^j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_0 = -1, \quad \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \ldots = \lambda_n(T) = 0.$$

Theorem: Wenn der Prozess $(x^*(t), u^*(t))$ optimal ist, dann existieren absolut stetige Funktionen $\lambda_i^*(t)$, die das adjungierte System f.ü. auf $[0, T]$ lösen und in jedem Zeitpunkt $\tau \in [0, T]$ ist die folgende Maximumbedingung erfüllt:

$$H(\lambda^*(\tau), x^*(\tau), u^*(\tau)) = \max_{u \in U_{ad}} H(\lambda^*(\tau), x^*(\tau), u).$$

GAMKRELIDZE, einer der Mitautoren des erwähnten Buches, bezeichnete später den ursprünglichen Pontryaginschen Beweis des Maximumprinzips als "in gewisser Weise sensationell". Das Ungewöhnliche an diesem Beweis ist die Anwendung von Ideen der Topologie, und zwar die *Schnitttheorie*, die auf Arbeiten des Amerikaners S. LEFSCHETZ zurückgehen.

BOLTYANSKI [8] zeigt in seinen späteren Arbeiten bei der extensiven Ausweitung des Maximumprinzips auf andere Klassen von Steuerproblemen, dass topologische Methoden, insbesondere Homotopieaussagen in der Kontrolltheorie sehr nützlich sind. Inzwischen existieren für diejenigen, denen topologische Betrachtungen fremd sind, auch Beweistechniken aus der konvexen Analysis, die das Maximumprinzip begründen. Einer der ersten, der dies ausführte, war PSHENICHNYI [84].

Die Übertragung des Maximumprinzips in eine diskrete Variante war mit Schwierigkeiten verbunden. In den zahlreichen Arbeiten, die in jener Zeit dieser Fragestellung gewidmet waren, gibt es nicht wenige fehlerhafte (siehe Zitate in [9]).

Ein anderes wichtiges Prinzip, das vor allem in der Theorie der diskreten optimalen Prozesse Anwendung gefunden hat, ist das *Prinzip der dynamischen Programmierung* und geht auf RICHARD BELLMAN zurück [5].

Richard Bellman (1920 - 1984)

1947: Mitarbeit im Bereich der theoretischen Physik in Los Alamos,
1952: Wechsel zur Rand Corporation, Entwicklung der Dynamischen Programmierung,
1965: Professor für Mathematik, Elektrotechnik und Medizin an der University of Southern California.

- Dynamische Optimierung, Bellmann'sches Optimalitätsprinzip,
- Algorithmus von Bellman und Ford (kürzeste Wege in Graphen),
- Bioinformatik.

1957: *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press.

In der Physik war dieses Prinzip schon seit langem bekannt (allerdings unter einem anderen Namen: *Legendre-Transformation*). Der Übergang von einer globalen (alle Zeitpunkte gleichzeitig betrachtenden) zu einer zeitabhängigen (dynamischen) Betrachtungsweise entspricht dort der Transformation des *Lagrange*-Funktionals in das *Hamilton* -Funktional mit Hilfe der *Legendre-Transformation*.
In der Kontrolltheorie und verwandten Gebieten kann man es einsetzen, um etwa eine Gleichung herzuleiten (*Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*), deren Lösung den optimalen Zielfunktionswert des dynamischen Prozesses ergibt.
Die Argumentation ist dabei etwa folgende: Wenn das Problem zeitabhängig ist, kann man den optimalen Wert des Zielfunktionals zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachten. Man fragt sich dann, welche Gleichung die optimale Lösung erfüllen muss, damit das Zielfunktional auch zu einem späteren Zeitpunkt optimal bleibt. Dies führt zur *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*. Damit kann man das Problem in Zeitschritte einteilen, anstatt es auf einmal lösen zu müssen.

Bellmannsches Optimalitätsprinzip für einen diskreten Prozess:

Der Wert der Zielfunktion auf der k-ten Stufe ist optimal, wenn für jedes auf der k-ten Stufe gewählte x_k der Zielfunktionswert der $(k-1)$-ten Stufe optimal ist.
Bezeichne

ξ	Zustandsvektor, der den Zustand des k-stufigen Prozesses beschreibt,
$\Lambda_k(\xi)$	Optimalwert des k-stufigen Prozesses, in Abhängigkeit vom Zustand,
ξ, x_k	auf der k-ten Stufe zu bestimmende Variable (oder Variablenvektoren).

Annahme: Nach Wahl von x_k und ξ sei der Vektor der Zustandsvariablen für die verbleibende $(k-1)$-te Stufe durch eine Transformation $T(\xi, x_k)$ gegeben.

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{x_k}\{f_k(\xi, x_k) + \Lambda_{k-1}[T(\xi, x_k)],\ k = 1, 2, ..., n\}.$$

System von Rekursionsformeln, in dem $\Lambda_k(\xi)$ für $(k = 1, \cdots, n)$ bestimmt werden kann, falls $\Lambda_{k-1}(\eta)$ für das $(k-1)$-stufige Problem bekannt ist.

Cirka fünf Jahre später setzt ein intensives Studium der Klasse der Steuerprobleme ein, beginnend mit den Arbeiten von ROXIN [90], NEUSTADT [78], BERKOVITZ [6], BALAKRISHNAN [2], HESTENES [44], BUTKOVSKII [11], HALKIN [42] u.a..

E. Roxin:
1962: *The existence of optimal controls*, Michigan Math. J. 9, 109-119.

L.W. Neustadt:
1963: *The existence of the optimal control in the absence of convexity conditions*,
J. Math. Anal. Appl. 7, 110-117.

A. V. Balakrishnan:
1965: *Optimal control problem in Banach spaces*,
J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 3, 152-180.

M.R. Hestenes:
1966: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Wiley, New York.

A. G. Butkovskii
1969: *Distributed Control Systems*, Isd. Nauka, Moscow.

H. Halkin:
1966: *A maximum principle of Pontryagin's type for nonlinear differential equations*,
SIAM J. Control 4, 90-112.

Berkovitz L.D.:
1969: *An existence theorem for optimal control*, JOTA 4, 77-86.

Die Anfänge der *stochastischen Optimierung* findet man in der Literatur ab 1955. Zu der Zeit wird erstmals die in Anwendungen beobachtete Zufälligkeit (eines Teils) der Daten von LP's erörtert, z.B. von DANTZIG [19] und G. TINTNER [95].

Es wurden verschiedene Aufgabenstellungen untersucht: Kompensations-Probleme (Recourse), Verteilungsprobleme (u.a. Verteilung des Optimalwertes bei gegebener gemeinsamer Verteilung der LP-Daten) oder Probleme mit Wahrscheinlichkeitsrestriktionen (Chance-Constraints).

Unter speziellen Strukturannahmen (bzgl. der Daten und ihrer gegebenen Verteilungen) werden erste Anwendungen von VAN DE PANNE UND POPP [80] und TINTNER [95] erörtert. Erste Lösungsansätze wurden beschrieben, z.B. bei BEALE [3] mittels quadratischer Optimierung, bei DANTZIG UND MADANSKY [20] mittels zweistufiger stochastischer Programme oder bei CHARNES UND COOPER [14] über Programme, deren Restriktionen mit bestimmter Wahrscheinlichkeit zu erfüllen sind.

Über den Stand der Entwicklung in der stochastischen Programmierung bis Mitte der siebziger Jahre informieren u.a. die Monographien von P. KALL [48] und ERMOLIEV [30].

G. B. Dantzig:
1955: *Linear programming under uncertainty*, Management Sci., 1: 197-206.

G. Tintner:
1955: *Stochastic linear programming with applications to agricultural economics*, in: 2nd Symp. Linear Programming, vol.2: 197-228.

A. Charnes and W.W. Cooper:
1959: *Chance-constrained programming*, Management Sci., 5:73-79.

E.M.L. Beale:
1961: *The use of quadratic programming in stochastic linear programming*, RAND Report P-2404, The RAND Corporation.

G.B. Dantzig and A. Madansky:
1961: *On the solution of two-stage linear programs under uncertainty*, in: Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Berkeley, pp. 165-176.

C. van de Panne and W. Poop:
1963: *Minimum-cost cattle feed under probabilistic problem constraint*, Management Sci., 9:405-430.

P. Kall:
1976: *Stochastic Linear Programming*, Springer-Verlag, Berlin.

Y.M. Ermoliev:
1976: *Stochastic Programming Methods*, Moscow, Nauka.

Wie man erkennt, war das eine Zeit intensiver Aktivitäten. Aber die Resultate waren im Wesentlichen noch isoliert und wurden nicht als Teil einer einheitlichen Disziplin verstanden. Die Situation änderte sich dramatisch in den 60-er und 70-er Jahren. Die Zeit war reif, um ein Gesamtbild der *Mathematischen Optimierung* zu erzeugen, das unmittelbar zu einem Kaleidoskop neuer Beiträge führte.

4 Die 60-er und 70-er Jahre

Die Hauptentwicklungsrichtungen in den 60-er und 70-er Jahren waren:

- Allgemeine Theorie der nichtlinearen Optimierung,
- Numerische Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme,
- Nichtglatte Optimierung,
- Globale Optimierung,
- Diskrete Optimierung,
- Optimierung auf Graphen,
- Stochastische Optimierung,
- Dynamische Optimierung.

Das Verstehen der allgemeinen Natur unterschiedlichster Optimierungsprobleme war der erste Durchbruch in dieser Periode. Obwohl es in den vorangegangenen Arbeiten verschiedene Ansätze für die Analyse spezifischer nichtlinearer Optimierungsprobleme gab, lieferten diese noch keine allgemeine Technik zur Herleitung von Optimalitätskriterien. Hinzu kommt, dass die genannten Arbeiten, bis auf die von BOLZA [10], ausschließlich den endlich - dimensionalen Fall behandeln.

Der Übergang ins Unendlichdimensionale wurde durch die Arbeiten von DUBOVITZKI - MILJUTIN [29] und PSHENICNYI [85] wesentlich vorangetrieben. Spätestens zu diesem Zeitpunkt wurde klar, dass die funktionalanalytische Begründung der Dualitätstheorie der mathematischen Optimierung in allgemeinen Räumen aus der geometrischen Form des Satzes von HAHN-BANACH folgt.

A. Ya. Dubovitzkii, A.A. Miljutin:

1963: *Extremum problems under constraints*, Doklady AN SSSR, 149(4), 759-762.

Theorem: *Seien $C_1, \cdots, C_m$ konvexe Kegel in einem Hilbertraum H, C_i $(i = 1, \cdots k \leq m)$ polyedral und $C = C_1 \cap \cdots \cap C_m$. Falls*

$$\left(\cap_{i=1}^{k} C_i\right) \cap \left(\cap_{i=k+1}^{m} \text{int } C_i\right) \neq \emptyset,$$

so gilt für den dualen Kegel von C:

$$C^* = C_1^* + \cdots + C_m^*.$$

Der *Dubovitzkii-Miljutin Formalismus* lieferte den Durchbruch: Die Charakterisierung des dualen Kegels des Durchschnitts endlich vieler Kegel ist ein effektives Werkzeug für die Formulierung eines einheitlichen Zugangs notwendiger Optimalitätsbedingungen und ist heute allgemein gebräuchlich für die Behandlung verschiedener Klassen von Optimierungsproblemen sowohl in endlich-dimensionalen als auch in unendlich-dimensionalen Räumen. Insbesondere lieferte er neue Kriterien für einige harte Probleme, z.B. Kontroll-Probleme mit Phasenbeschränkungen [7].

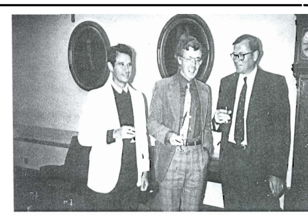
Mit der Ausarbeitung der *Theorie der konvexen Analysis* und den Monographien von ROCKAFELLAR [88] (für den Fall endlich-dimensionaler Räume) und IOFFE / TICHOMIROV [45] (für Banach-Räume) wurden diese Untersuchungen weiter vorangetrieben und vertieft.

R. T. Rockafellar:
1970: *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton.

A. D. Ioffe, V. M. Tichomirov:
1974: *Theory of Extremum Problems*, Moscow, Nauka.

Parallel zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der nichtlinearen Optimierung wurde deutlich, dass die numerischen Methoden ebenfalls in einem einheitlichen Rahmen behandelt werden können.

R. Fletcher, C.M. Reeves:
1964: *Function minimization by conjugate gradient*, Computer Journal, 7, 149-154.



Davidon, Fletcher, Powell

E.S. Levitin, B.T. Polyak:
1966: *Minimization methods under constraints*, Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz. 6, 787-823.

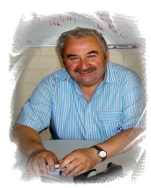
Polyak

Die Publikationen von FLETCHER UND REEVES [34] zu den konjugierten Gradientenmethoden, oder die Arbeiten von LEVITIN UND POLYAK [73] beschreiben zahlreiche *Gradienten- und Newton-ähnliche Methoden* für unrestringierte Optimierungsprobleme und deren Erweiterung auf restringierte Aufgaben. FIACCO UND MCCORMIK [33] publizieren erste Ergebnisse zu *Penalty-Methoden*. Auf diese numerischen Entwicklungen bauten in den 70-er und 80-er Jahren die Arbeiten von JON DENNIS UND ROBERT SCHNABEL [27], RON GOLDFARB [39], MICHEL POWELL [83], W.C. DAVIDON [22] auf, um nur einige zu nennen.

Allgemeine Konvergenzsätze und Theoreme über Konvergenzraten für numerische Algorithmen in endlich- und unendlich-dimensionalen Räumen wurden bewiesen und zahlreiche Anwendungen zu nichtlinearen, insbesondere auch globalen Optimierungsaufgaben, Kontroll-Problemen, semi-infiniten Problemen usw. wurden betrachtet. Diese analytisch-numerischen Untersuchungen setzten sich über viele Jahre erfolgreich fort und es entstanden zahlreiche Monographien.

N.Z. Shor:
1962: *Application of the subgradient method for the solution of network transportation problems*, Notes of Sc. Seminar, Ukrainian Acad. of Science, Kiew.

V. F. Demyanov, A. M. Rubinov:
1968: *Approximate Methods for Solving Extremum Problems*, Leningrad, State Univ.



Glatte Optimierungsprobleme mit differenzierbaren Funktionen erlauben Gradienten- bzw. Newton-Approximationen. Der Ukrainer NAUM SHOR [92] war der erste, der diesen Zugang auf nicht-glatte konvexe Probleme übertrug. In seiner Dissertation schlug er ein Subgradienten-Verfahren für nichtdifferenzierbare Funktionen vor und verwendete es zur numerischen Lösung eines Programms, das dual zu einem Transport-ähnlichen Problem ist. Später wurde dieser Zugang unter dem Namen *Bundle-Methods* durch SCHRAMM/ZOWE [91], LEMARECHAL[70] und KIWIEL [58] weiterentwickelt.

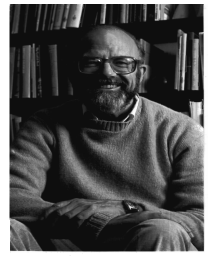
In den 70-er Jahren wurde die nichtglatte Analysis (Begriff wurde von F. Clarke [15] geprägt) zu einem gut entwickelten Zweig der Analysis. Einige Teile dieser Theorie sind mehr oder weniger komplett, dazu gehören die Subdifferentialrechnung für konvexe Funktionen und die Minimax-Theorie, die maßgeblich von DEMYANOV / RUBINOV ausgearbeitet wurde (vgl. auch [23] – [26]).

Lange Zeit war nicht bekannt ob die LP's zur Klasse der nicht-polynomialen, den sog. "harten" Problemen gehören, oder zur "leichteren" Klasse der polynomial lösbaren Probleme.

Victor Klee (1925–2007)

1957: Professor at University of Washington, Seattle,

1995: Ehrendoktor des FB IV, Universität Trier.

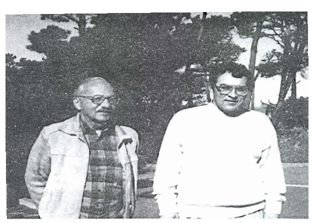


- Convex sets,
- Functional analysis (Kadec-Klee-Theorem),
- Analysis of algorithms, Optimization, Combinatorics.

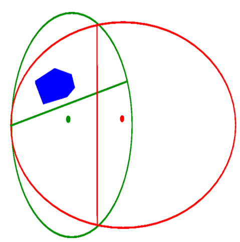
1970 konstruierten VICTOR KLEE, der auch in der Funktionalanalysis gut bekannt ist, zusammen mit GEORG MINTY ein Beispiel [59], dass zeigt, dass der klassische Simplex-Algorithmus im schlimmsten Fall alle Ecken eines verzerrten Einheitswürfels durchläuft. Da die Anzahl der Ecken exponentiell wächst, wenn die Dimension des Würfels steigt, werden im schlimmsten Fall alle Ecken durchlaufen und somit eine exponentielle Anzahl von Schritten benötigt, um das Optimum zu erreichen.

Im Jahre 1979 veröffentlichte LEONID KHACHIYAN [57] die *Ellipsoidmethode*, eine Methode zur Bestimmung eines zulässigen Punktes einer polyedrischen Menge.

Leonid Khachiyan:
1979: *A polynomial algorithm in linear programming*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 244, 1093-1096.



Dantzig, Khachian (Asilomar, 1990)

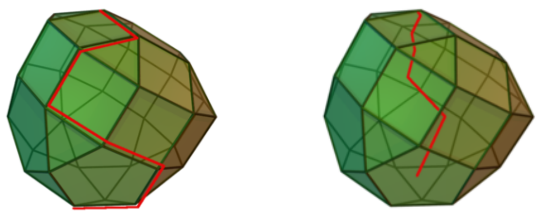


Die *Ellipsoidmethode* wurde ursprünglich in den Jahren 1976 und 1977 von YUDIN UND NEMIROVSKII [99] und unabhängig davon von NAUM SHOR zur Lösung konvexer Optimierungsprobleme vorgeschlagen.
Im Jahre 1979 modifizierte KHACHIYAN das Verfahren und entwickelte damit den ersten polynomialen Algorithmus zur Lösung linearer Programme, da man ein LP mit Hilfe der Optimalitätsbedingungen in ein lineares Gleichungs- und Ungleichungssystem, somit in eine polyedrische Menge, umschreiben kann. Für praktische Zwecke war dieser Algorithmus allerdings nicht geeignet.
Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, ein Ellipsoid zu definieren, das alle Ecken des Polyeders enthält. Anschließend wird festgestellt, ob der Mittelpunkt dieses Ellipsoids im Polyeder enthalten ist. Falls ja, hat man einen Punkt im Polyeder gefunden

und kann aufhören. Andernfalls kann man das Halbellipsoid bestimmen, in dem das Polyeder enthalten sein muss, und ein neues, kleineres Ellipsoid um das Polyeder legen. Nach einer Anzahl von Schritten, die polynomial von der Kodierungslänge des LP's abhängt, hat man entweder einen Punkt im Polyeder gefunden oder weiß, dass das Polyeder leer ist.

Mitte der 80-er Jahre, genauer 1984, begannen NARENDRA KARMARKAR [55] und andere mit der Entwicklung von *Innere-Punkte-Verfahren* zur Lösung linearer Programme.

Narendra Karmarkar:
1984: *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica 4, 373-395.



Simplex-Methode Innere-Punkte-Methode

In diesem Zusammenhang ist das Schicksal der Arbeit von DIKIN [28] zu erwähnen. Er war ein Student KANTOROVICH's und in seiner Ph.D. thesis bewies er mathematisch exakt einige Regeln zur numerischen Lösung von LP's, die sein Doktorvater ihm vorschlug zu untersuchen. DIKIN bewies die Konvergenz der Methode, aber unterlies es Konvergenzabschätzungen zu machen. Diese Arbeit fand kein Interesse und war vergessen bis in die späten 80-er Jahre, als dann festgestellt wurde, dass KARMAKAR's Algorithmus sehr nahe an DIKIN's Methode dran war.
Innere-Punkte-Verfahren nähern sich einer optimalen Ecke durch das Innere des Polyeders, während die Simplex-Methode über die Ecken und Kanten des Polyeders läuft. Die Bedeutung dieses Innere-Punkte-Zugangs lag vor allem darin, dass er der erste polynomiale Algorithmus zum Lösen linearer Programme war, der das Potential hatte, auch praktisch einsetzbar zu sein. Die entscheidenden Durchbrüche, die die Innere-Punkte-Verfahren konkurrenzfähig zum Simplex-Algorithmus machten, wurden aber erst in den 90-er Jahren erzielt.
Ein Vorteil dieser Verfahren ist, dass sie, im Gegensatz zum Simplex-Verfahren, in leichter Abwandlung auch zum Lösen quadratischer oder bestimmter nichtlinearer Programme, sog. *semi-definiter Programme*, eingesetzt werden können. Sie sind für große, dünn besetzte Probleme häufig dem Simplex-Verfahren überlegen.
Ein Nachteil ist, dass sie sich nach dem Hinzufügen einer Nebenbedingung oder Variablen im LP bei weitem nicht so effizient "warmstarten" lassen wie das Simplex-Verfahren.

5 Schlussbemerkungen

Inzwischen hat sich die Optimierung zu einem gewaltigen Strom verbreitert, gespeist durch die Ideen und Arbeiten Tausender von Mathematikern. Neue Entwicklungsrichtungen haben sich aufgetan, wie *robust programming*, *variational inequalities and complementarity problems, MPEC - mathem. programming with equilibrium constaints*, *PDE constrained optimization*, *shape optimization* und viele andere.

Ebenso hat sich das Anwendungsfeld der mathematischen Optimierung ständig verbreitert, neue Modelle der *Medizin und Neurologie*, des *drug design*, der *Biomedizin*, um nur einige zu nennen, sind neben die klassischen Anwendungsgebiete der Ökonomie und Naturwissenschaften getreten. Auf dem 18. *International Symposium on Mathematical Programming* 2003 in Kopenhagen konnte man 20 parallele Sektionen und ca. 1250 Vorträge zählen. Zur Erinnerung: auf dem Kongress in Chicago 1949 waren es höchstens zwei Dutzend Vorträge.

Angesichts dieser Zahlen wird klar, dass es schier unmöglich ist, alle neuen Entwicklungen zu benennen und das man sich in der Darstellung der Ergebnisse einschränken muss. Das vorliegende Material ist ein Versuch, die frühen Anfänge und einige ausgewählte mathematische Ideen der Optimierung darzustellen. Dabei wurde im Wesentlichen auf die US-amerikanische und russische Schule hingewiesen. Diese Schulen haben m. E. die Entwicklung der Mathematischen Optimierung am deutlichsten beeinflusst. Es ist völlig klar, dass andere wichtige Strömungen im Theoriengebäude der Optimierung vernachlässigt wurden, dass wesentliche Beiträge anderer Nationen unerwähnt geblieben sind.

Literatur

[1] AKHIEZER, N.I., *The Classical Problem of Moments*, Fizmatgiz, Moscow, 1961.

[2] BALAKRISHNAN, A.V., Optimal control problems in Banach spaces, *J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control* 3 (1965) 152-180.

[3] BEALE, E.M.L., The use of quadratic programming in stochastic linear programming, *RAND Report P-2404*, RAND Corporation, 1961.

[4] BENDERS, J.F., Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numer. Math.* 4 (1962) 238-252.

[5] BELLMAN, R., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.

[6] BERKOVITZ, L.D., An existence theorem for optimal control, *JOTA* 4 (1969) 77-86.

[7] BOLTYANSKII, V. G., Method of tents in the theory of extremum problems, *Uspekhi Matem. Nauk*, 30 (1975) 3-55.

[8] BOLTYANSKII, V. G., *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*, Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1971.

[9] BOLTYANSKII, V. G., *Optimale Steuerung diskreter Systeme*, Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1976.

[10] BOLZA, O. Über Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen, *Math. Abhandlungen*, 1 (1914) 1-18.

[11] BUTKOVSKI, A.G., *Distributed Control Systems*, Isd. Nauka, Moscow, 1969.

[12] CARATHÉODORY, C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, New York, Chelsea Publishing Co., 1982.

[13] CHARNES, A., COOPER, W.W. AND MELLON, B., A model for optimizing production by reference to cost surrogates, *Econometrica*, 23 (1955) 307-323.

[14] CHARNES, A. AND COOPER, W.W., Chance-constrained programming, *Management Sci.*, 5 (1959) 73-79.

[15] CLARKE, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.

[16] DANTZIG, G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton, 1963.

[17] DANTZIG, G.B., *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966.

[18] DANTZIG, G.B., *Lectures in Differential Equations*, Van Nostrand, Reinbold Co., New York, 1969.

[19] DANTZIG, G.B., Linear programming under uncertainty, *Management Sci.*, 1 (1955) 197-206.

[20] DANTZIG, G.B. AND MADANSKI, A., On the solution of two-stage linear programs under uncertainty, in: *Proc. 4th Berkeley Symp. Math Stat. Prob.* Berkeley, 1961.

[21] DANTZIG, G.B. AND WOLE, PH., Decomposition principles for linear programs, *Oper. Res.*, 8 (1960) 101-111.

[22] DAVIDON, W.C., *Variable Metric Methods for Minimization*, A.E.C. Res. and Develop. Report ANL-5990, Argonne National Laboratory, Illinois, 1959.

[23] DEMYANOV, V.F. AND RUBINOV, A.M., *Approximate Methods for Solving Extremum Problems*, Leningrad State Univ., Leningrad, 1968.

[24] DEMYANOV, V.F. AND MALOZEMOV, V.N., *Introduction to Minimax*, Nauka, Moscow, 1972.

[25] DEMYANOV, V.F. AND VASILIEV, P.V., *Nondifferentiable Optimization*, Nauka, Moscow, 1981.

[26] DEMYANOV, V.F., *Fundations of Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus*, Nauka, Moscow, 1990.

[27] DENNIS, J. AND SCHNABEL, R., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.

[28] DIKIN, I., An iterative solution of problems of linear and quadratic programming, *Doklady AN SSSR*, 174 (1967) 747-748.

[29] DUBOVITSKII, A. YA. AND MILJUTIN, A.A., Extremum problems under constraints, *Doklady AN SSSR*, 149 (1963) 759-762.

[30] ERMOLIEV, Y.M., *Stochastic Programming Methods*, Nauka, Moscow, 1976.

[31] EULER, L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Opera Omnia, Series 1, Volume 24, 1744.

[32] FARKAS, J., Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 124 (1902) 1-27.

[33] FIACCO, A.V. AND MCCORMICK, G.P., *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, 1968.

[34] FLETCHER, R. AND REEVES, C.M., Function minimization by conjugate gradient, *Computer J.* 7 (1964) 149-154.

[35] FORD, L.R. AND FULKERSON, D.R., *Flows in Networks*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.

[36] FOURIER, J.B., *Analyse des Équations Déterminées*, Navier, Paris, 1831.

[37] GARDING, L., The Dirichlet problem, *Math. Intelligencer* 2 (1979) 42-52.

[38] GASS, S.I. AND ASSAD, A.A., An annotated timeline of operations research: an informal history, *Int. Ser. in OR & Management Sci.* 75 (2005).

[39] GOLDFARB, D., Extension of Davidon's variable metric method to maximization under linear inequality and equality constraints, *SIAM J. Appl. Math.* 17 (1969) 739-764.

[40] GOLDMAN, A.J. AND TUCKER, A.W., *Theory of linear programming*, in: Kuhn and Tucker (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems* Princeton, 1956, pp. 53-97.

[41] GOMORY, R., Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, *Bull. Amer. Math. Soc.* 64 (1958) 275-278.

[42] HALKIN, H., A maximum principle of Pontryagi, *SIAM J. Control* 4 (1966) 90-112.

[43] HESTENES, M.R. AND STIEFEL, E., Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 49 (1952) 409-436.

[44] HESTENES, M.R., *Calculus of Variational and Optimal Control Theory*, Wiley, New York, 1966.

[45] IOFFE, A.D. AND TIKHOMIROV, V.M., *Theory of Extremum Problems*, Nauka, Moscow, 1974.

[46] JACOBI, C. G. J., *Vorlesungen über analytische Mechanik : Berlin 1847/48*, (Nach einer Mitschr. von Wilhelm Scheibner), Hrsg. von Helmut Pulte, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Braunschweig, Vieweg, 1996.

[47] JOHN, F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, in: *Studies and Essays, Presented to R. Courant on his 60th Birthday, Jan. 1948*, Interscience, New York, 187-204.

[48] KALL, P., *Stochastic Linear Programming*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[49] KANTOROVICH. L.V., *Mathematical Methods for Production Organization and Planning*, Leningrad, 1939.

[50] KANTOROVICH. L.V., On an efficient method for solving some classes of extremum problems, *Doklady AN SSSR*, 28 (1940) 212-215.

[51] KANTOROVICH. L.V., Fuctional analysis and applied mathematics, *Uspekhi Matem. Nauk*, 6 (1948) 89-185.

[52] KANTOROVICH. L.V., *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1959.

[53] KANTOROVICH. L.V., *Economical Calculation of the Best Utilization of Ressources*, Moscow, Academy of Sciences, 1960.

[54] KANTOROVICH. L.V., *The Best Use of Economic Ressources*, Harvard U. Press, Cambridge, 1965.

[55] KARMARKAR, N., A new polynomial time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4 (1984) 373-395.

[56] KARUSH, W., *Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions*, *MSc Thesis*, Univ. of Chicago, 1939.

[57] KHACHIYAN, L., A polynomial algorithm in linear programming, *Doklady AN SSSR*, 244 (1979) 1093-1096.

[58] KIWIEL, K., Proximal level bundle methods for convex nondifferentiable optimization, saddle point problems and variational inequalities, *Math. Programming*, 69 B, (1995), 89-109.

[59] KLEE, V. AND MINTY, G., How good is the simplex algorithm? in: *Inequalities III*, O. Shisha, ed., Academic Press, New York (1972), 159-175.

[60] KOOPMANS, T.C., *Exchange Ratios between Cargoes on Various Routes (Non-Refrigerated Dry Cargoes)*, Memorandum for the Combined Shipping Adjustment Board, Washington, D.C., 1942.

[61] KOOPMANS, T.C., *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, 1951.

[62] KOOPMANS, T.C. AND MONTIAS, M., On the Description and Comparison of Economic Systems, in: *Comparison of Economic Systems*, Univ. of California Press, 1971, pp. 27-78.

[63] KREIN, M.G. AND NUDELMAN, A.A., *Markov's Problem of Moments and Extremum Problems*, Nauka, Moscow, 1973.

[64] KUHN, H.W. AND TUCKER, A.W., Nonlinear Programming, *Proc. of the Second Berkeley Symp. in Math., Statistics and Probability*, Univ. of California Press, Berkeley 1951, 481-492.

[65] KUHN, H.W. AND TUCKER, A.W., Linear and nonlinear programming, *Per. Res.*, 5 (1957) 244-257.

[66] LAGRANGE, J.L., Théorie des Fonctions Analytiques, *Journal de l'École Polytechnique*, (1797).

[67] LAGRANGE, J.L., Mécanique Analytique, *Journal de l'École Polytechnique*, (1788).

[68] LANCASTER, L.M., The history of the application of mathematical programming to menu planning, *Europian Journal of Operation Research 57* (1992), 339–347.

[69] LEIFMAN, L.J., *Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics: A Collection of Papers Dedicated to the Memory of L.V. Kantorovich*, Oxford Univ. Press, 1990.

[70] LEMARECHAL, C., Lagrangian decomposition and nonsmooth optimization: Bundle algorithm, prox iterations, augmented Lagrangian, in *Nonsmooth Optimization: Methods and Applications (Erice, 1991)* Gordon and Breach, Montreux, 1992, 201-206.

[71] LENSTRA, J.K., RINNOOY KAN, A.H.G. AND SCHRIJVER, A. *History of Mathematikal Programming*, CWI North-Holland, 1991.

[72] LEVENBERG, K., A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares, *Quarterly of Applied Mathem.* 2 (1944) 164-168.

[73] LEVITIN, E.S. AND POLYAK, B.T., Minimization methods under constraints, *Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz.* 6 (1966) 787-823.

[74] MINKOWSKI, H., Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Klasse* (1897), 198-219.

[75] MONGE, G., Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais. Histoire de l' Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, (1781), 666-704.

[76] NEUMANN, J.V., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Math. Ann.*, 100 (1928) 295-320.

[77] NEUMANN, J.V., AND MORGENSTERN, O., *The Theory of Games and Economic Behavior*. Springer, New York, 1944.

[78] NEUSTADT, L.W., The existence of the optimal control in the absence of convexity conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 7 (1963) 110-117.

[79] PADBERG, M., *Linear Optimization and Extensions*, Springer, 1961.

[80] PANNE, C. AND POOP, W., Minimum-cost cattle feed under probabilistic problem constraint. *Management Sci.* 9 (1963), 405-430.

[81] POLYAK, B.T., History of mathematical programming in the USSR. *Math. Programming, Ser. B 91* (2002), 401-416.

[82] PONTRYAGIN, L.S. AND BOLTYANSKI, V.G. AND GAMKRELIDSE, R.V., *Mathematical Theory of Optimal Processes*, Nauka, Moscow, 1956.

[83] POWELL, M., A method for nonlinear constrainets in minimization problems, in: Fletcher, R. (ed.): *Optimization*, Acad. Press, New York, (1969) 283-298.

[84] PSHENICHNYI, B.N., *Necessary Conditions for Extrema*, Nauka, Moscow, 1969.

[85] PSHENICHNYI, B.N., *Convex Analysis and Extremum Problems*, Nauka, Moscow, 1980.

[86] POUSSIN, C.J., Sure la méthode de l'approximation minimum. *Anales de la Societe Scientifique de Bruxelles* 35 (1911), 1-16.

[87] REMEZ, E. YA. , *Foundations of Numerical Methods for Chebyshev Approximation*, Naukova Dumka, Kiew, 1969.

[88] ROCKAFELLAR, R.T., *Konvex Analysis*. Princeton University Press, 1972.

[89] ROUCHE, N., HABETS, P. AND LALOY, M., *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. Springer, 1977.

[90] ROXIN, E., The existence of optimal control, *Michigan Math. J.* 9 (1962) 109-119.

[91] SCHRAMM, H. AND ZOWE, J., A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results, *SIAM J. Optim.* 2 (1992), 121-152.

[92] SHOR, N., Application of the subgradient method for the solution of network transportation problems, Notes of Sc.Seminar, Ukrainian Acad. of Sci., Kiew, 1962.

[93] SLATER, M., *Lagrange Multipliers Revisited*. Cowles Commission Discussion Paper, No. 403.

[94] STIEGLER, G.J., *Journal Econometrica* (1949).

[95] TINTNER, G., Stochastic linear programming with applications to agricultural economics, *2nd Symp. Linear programming* 2 (1955), 197-228.

[96] VENTZEL, E.S., *Elements of Game Theory*, Fizmatgis, Moscow, 1959.

[97] VOROBYEV, N.N., Finite non-coallition games, *Uspekhi Matem. Nauk*, 14 (1959), 21-56.

[98] YUDIN, D.B. AND GOLSTEIN, E.G., *Problems and Methods of Linear Programming*, Sov. Radio, Moscow, 1961.

[99] YUDIN, D.B. AND NEMIROVSKII, A.S., *Complexity of Problems and Efficiency of Optimization Methods*, Nauka, Moscow, 1979.

[100] YUSHKEVICH, A.P., *Histrory of Mathematics in Russia before 1917*. Nauka Moscow, 1968.

[101] ZUKHOVITSKII, S.I., On the approximation of real functions in the sense of P.L. Chebyshev, *Uspekhi Matem. Nauk*, 11 (1956), 125-159.