

Alternative Lösung zur Bestimmung von A^{-1} in H27:

Wie in der Übung angegeben, kann man die Inverse von A auch mittels „Rückwärts-einsetzen“ bestimmen. Dieses Vorgehen entspricht dem, die Matrix $(A|I_4)$, also

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

durch Elementarumformungen so umzuformen, dass im linken Block I_4 entsteht. Im rechten Block kann dann die Inverse abgelesen werden. Addiert man das -9 -Fache der 4. Zeile zur 3. und dividiert diese anschließend durch 8, so erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nun addieren wir das -6 -Fache der neuen 3. Zeile und das -7 -Fache der 4. Zeile zur 2. und dividieren anschließend durch 5, sodass sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ergibt. Abschließend addieren wir das -2 -Fache der neuen 2. Zeile, das -3 -Fache der (neuen) 3. Zeile und das -4 -Fache der letzten Zeile zur ersten:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{40} & -\frac{21}{40} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Folglich ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{40} & -\frac{21}{40} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$