Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es seien A, B Mengen. Zeigen Sie: Es gilt

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussage gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{2^\nu} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Es sei $a_0 = 1$, und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} \coloneqq \frac{a_n^2}{4} + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(i) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

(a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz und Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu}{3\nu^2 + 1}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu^k}{2^\nu}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \ln(\nu)}.$$

(b) Es sei $(k_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ (d.h. eine Folge mit $k_\nu \in \{0, \ldots, 9\}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\nu}{10^\nu}$ ist konvergent mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\nu}{10^\nu} \leq 1.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 5)^n (z - 2)^n$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+2)} z^n$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Doppelreihe konvergiert, und bestimmen Sie ihren Wert:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!5^n}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x) \coloneqq e^x - 4e^{-x}$, ist streng monoton wachsend.

(ii) Für alle $r\in\mathbb{R}$ existiert genau ein $x_0\in\mathbb{R}$ mit $f(x_0) = r$.

(b) Untersuchen Sie, ob

$$A \coloneqq \left\{e^x - 4e^{-x} \colon x\in\mathbb{R}\right\}$$

offen in $\left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$ und ob A abgeschlossen in $\left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$ ist.