10. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 22.1.19, 8:25 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Hausübungen

H26: (2+2+4+2 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $[0,\infty)$.

(i) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \le 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2^n} a_\nu.$$

(ii) Folgern Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\nu} \le n+1 \le 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2^n} \frac{1}{\nu}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(iv) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \sqrt[p]{\nu}}$$

auf Konvergenz.

H27: (5 Punkte)

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\sqrt[3]{\nu}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

H28: (4 Punkte)

Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k e^x = 0$.

(Hinweis: Verwenden Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.)