

**11. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik**

Abgabe: bis Dienstag, 29.1.19, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

## Hausübungen

H29: (9 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $x \in \mathbb{R}$  gilt

- (i)  $\cosh(x), \sinh(x) \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\frac{1}{2}e^{|x|} \leq \cosh(x) \leq e^{|x|}$ ,
- (iii)  $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$ ,
- (iv)  $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$ ,
- (v)  $\cosh(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$ ,
- (vi)  $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$ .

H30: (5+5 Punkte)

- (a) Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $x_0 \in X$  sowie  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1.  $f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$ , d.h. für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

für alle  $x \in X$  mit  $d_X(x, x_0) < \delta$  gilt.

2. Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- (b) Die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\pi/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und  $g(x) := x^3 \cdot f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen von  $f$  und  $g$  an (mit Begründung). (Es kann hilfreich sein, die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \frac{1}{n+1/2}$  zu betrachten.)