L. Frerick / M. Müller WS 2018/19

20.11.2018

## 4. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 27.11.18, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

### Hausübungen

H10: (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \binom{m+\nu-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

ist.

(b) Berechnen Sie die Spezialfälle $m = 1$ und $m = 2$.

(c) Überlegen Sie sich für alle $n \in \mathbb{N}$ eine geschlossene Darstellung für $\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)$ und weisen Sie nach, dass diese Darstellung richtig ist.

H11: (6 Punkte)

(a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 \leq 2^n$? (Beweis)

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ und beweisen Sie, dass diese richtig ist

H12: (6 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Menge

$$S_n := \{\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \pi \text{ ist bijektiv}\}$$

(Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$) hat genau $n!$ Elemente.

(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage per Induktion. Betrachten Sie für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ die Mengen

$$T_k := \{\varphi \in S_{n+1} \colon \varphi(n+1) = k\}.$$

Überlegen Sie sich, dass $T_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ eine $n!$-elementige Menge ist (d.h. es gibt $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \ldots, n+1\}$ nach $\{1, \ldots, n+1\}$, bei denen $n+1$ auf $k$ abgebildet wird), indem Sie feststellen, dass es zu $\varphi \in T_k$ genau eine bijektive Funktion $\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$ mit $\varphi(i) = \psi(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt. Benutzen Sie ohne Beweis: Für $n$-elementige Mengen $A, B$ hat $S_n$ gleich viele Elemente wie $\{\psi : A \to B : \psi \text{ ist bijektiv}\}$.)