L. Frerick / M. Müller WS 2018/19
4.12.2018

6. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 11.12.18, 8:25 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Hausübungen

H16: (3+4+2+2 Punkte)

(a) Es seien $z = 3 - 2i$ und $w = 4 + 3i$ gegeben. Geben Sie zw, $\overline{z}w$, $\overline{z}/w$, $z/\overline{w}$, $1/i$ in der Normaldarstellung an.

(b) Zeigen Sie:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert ein $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot z^{-1} = 1$.

(ii) Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

(iii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Dann gilt

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

und für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

H17: (6 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene. (Ihr Lösungsweg muss erkennbar sein.)

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(iz) \leq 1, 1 < \mathrm{Im}(iz) < 2\}$,

(ii) $B := \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{2-i}\right) = 1\right\}$.

H18: (4 Punkte)

Wir betrachten die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i/2$, $z_4 = i/2$ in der komplexen Ebene, die Eckpunkte eines Rechtecks sind. Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := 2iz$ und $g(z) := (1+i)z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Skizzieren Sie das Rechteck und die Punkte $f\left(z_j\right)$ sowie $g\left(z_j\right)$ für $1 \leq j \leq 4$. Beschreiben Sie, welche Auswirkung die Anwendung der Funktionen hat.