L. Frerick / M. Müller WS 2016/17
10.1.2017

10. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 17.1.17, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T17: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$definiert durch

$$a_n := \sqrt{a_{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und $a_0 \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimmen Sie zudem den Grenzwert.

T18: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

T19: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}, \quad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[3]{\nu}}, \quad \text{(iii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2017}{\nu}\right)^\nu.$$

Hausübungen

H28: (6 Punkte)

Es seien $c > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_n := \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und $a_0 \geq \sqrt{c}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

H29: (5 Punkte)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \geq 0$. Zeigen Sie:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n\,(n-1)}{2}x^2.$$

(b) Es seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0.$$

H30: (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{2 \cdot \sqrt[\nu]{\nu}}, \quad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu!}}, \quad \text{(iii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{10}}{5^{\nu/2}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2017}{2018}\right)^{\nu}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Reihenwert.