11. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 24.1.17, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T20: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $[0,\infty)$. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n+1}-1} a_\nu \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

T21: Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren, und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert:

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}.$$

T22: Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Hausübungen

H31: (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{1,\ldots,8\}$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{5^\nu}$ konvergent ist mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{5^\nu} \leq 2.$$

H32: (2+2+4+2 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $[0,\infty)$.

(i) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \leq 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2^n} a_\nu.$$

(ii) Folgern Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\nu} \leq n+1 \leq 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2^n} \frac{1}{\nu}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(iv) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \sqrt[p]{\nu}}$$

auf Konvergenz.

H33: (5 Punkte)

Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\sqrt[3]{\nu}}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.