

12. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 31.1.17, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

TutoriumT23: Zeigen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

- (i) $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$,
- (ii) $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = -i \cdot \sin(iz)$,
- (iii) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$,
- (iv) $\sinh(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$.

Hausübungen

H33: (4 Punkte)

Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0$.

H34: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$$

H35: (Formeln von de Moivre, 4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ gerade}}}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu/2} \sin(x)^\nu \cos(x)^{n-\nu}, \\ \sin(nx) &= \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{(\nu-1)/2} \sin(x)^\nu \cos(x)^{n-\nu} \end{aligned}$$

gilt.

H36: (9 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cosh(x), \sinh(x) \in \mathbb{R}$,

(ii) $\frac{1}{2}e^{|x|} \leq \cosh(x) \leq e^{|x|}$,

(iii) $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$,

(iv) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(v) $\cosh(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$,

(vi) $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$.