L. Frerick / M. Müller WS 2016/17
31.1.2017

13. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 7.2.17, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T24: Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und δ die diskrete Metrik auf X, die für alle $x, y \in X$ durch

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass δ tatsächlich eine Metrik auf X ist.

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (X, δ). Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Es existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in X$, so dass $x_n = x_0$ für alle $n \geq N$ gilt.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

T25: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in X$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in X$, wobei $i \in \{0, \ldots, n\}$ ist,

$$d(x_0, x_n) \leq \sum_{\nu=1}^{n} d(x_{\nu-1}, x_\nu)$$

gilt.

Hausübungen

H37: (5+5 Punkte)

(a) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $x_0 \in X$ sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. f ist stetig an der Stelle x_0, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$
für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt.
2. Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$.

(b) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\pi/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $g(x) := x^3 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen von f und g an (mit Begründung).

H38: (5+5 Bonuspunkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine Abbildung, wobei $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ mit der Betragsmetrik versehen seien. (Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$|x| := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 \right)^{1/2}$$

der Betrag von x und $d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|$ die zugehörige Betragsmetrik für $x, y \in \mathbb{K}^n$.)

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in einem $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ ist, wenn f_i für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ stetig in $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ ist. (Zeigen Sie dazu, dass eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ genau dann gegen $x^{(0)}$ konvergiert, wenn alle Komponentenfolgen $\left(x_\nu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gegen $x_\nu^{(0)}$ konvergieren, $1 \leq \nu \leq n$.)

(b) Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definiert durch $x \mapsto Ax$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass f eine stetige Funktion auf $\mathbb{K}^n$ ist.