L. Frerick / M. Müller

WS 2016/17
7.2.2017

14. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Wiederholungsblatt

Keine Abgabe

H39: Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

gilt.

H40: Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x - [x])^2$ auf die Existenz rechts- und linksseitiger Grenzwerte und auf Stetigkeit. Skizzieren Sie zudem den Graphen von f.

H41: Es sei $a_1 = 0$. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{3}{4} a_{n-1} + \frac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

Zeigen Sie:

(i) $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a_n - a_{n-1} > 0$,

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ermitteln Sie den Grenzwert.

H42: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,\nu}{5^{\nu\cdot\nu}}, \text{ (ii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^{\nu}}, \text{ (iii)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2+\nu}{\nu^4+2\nu+3}, \text{ (iv)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\sqrt[p]{\nu}} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

H43: Untersuchen Sie

$$M := \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf die Existenz von $\inf(M)$, $\min(M)$, $\sup(M)$ und $\max(M)$ in $\mathbb{R}$, und geben Sie diese im Falle der Existenz an. (Verwenden Sie Ihre Kenntnisse von der Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.)

H44: Zeigen Sie:

(i) Die Funktion sinh ist streng monton wachsend.

(ii) Für alle $r \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(x) = r$.