L. Frerick / M. Müller WS 2016/17

31.10.2016

2. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 8.11.16, 8:00 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H4: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $\varphi\colon \{a,b,c,d,e,f\} \to \{\triangle, \square, \heartsuit, *\}$, die durch

$$\begin{array}{lll} \varphi(a) := \triangle, & \varphi(c) := \triangle, & \varphi(e) := \heartsuit, \\ \varphi(b) := \square, & \varphi(d) := \heartsuit, & \varphi(f) := \triangle, \end{array}$$

definiert ist. Bestimmen Sie die Mengen $\varphi(\{a,d,e\})$, $\varphi(\{c,f\})$, $\varphi(\{a,b,c\})$, $\varphi^{-1}(\{\triangle\})$, $\varphi^{-1}(\{\square,\heartsuit\})$ und $\varphi^{-1}(\{*\})$. Begründen Sie, warum φ weder injektiv noch surjektiv ist.

H5: (4+3+2 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $A \subset X$ ist $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(ii) Für alle $B \subset Y$ ist $f\left(f^{-1}(B)\right) = f(X) \cap B \subset B$.

(b) Beweisen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $A = f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subset X$ gilt.

(c) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass in Teil (a) in beiden Fällen im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

H6: (6+2 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf der Menge X und $\mathscr{G}$ ein Mengensystem auf der Menge Y.

(a) Beweisen Sie

$$f\left(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M\right) = \bigcup_{M\in\mathscr{F}} f(M) \quad\text{und}\quad f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathscr{G}} N\right) = \bigcap_{N\in\mathscr{G}} f^{-1}(N).$$

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass im Allgemeinen nicht

$$f\left(\bigcap_{M\in\mathscr{F}} M\right) = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} f(M)$$

gilt.