L. Frerick / M. Müller WS 2016/17
8.11.2016

3. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 15.11.16, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H7: (2+2+3 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion:

(i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definiert durch $n \mapsto 3n^3$,

(ii) $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $n \mapsto n^4$,

(iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definiert durch $n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

H8: (4+2+2 Punkte)

Es seien X, Y, Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Beweisen Sie:

  (i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

  (ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(b) Es sei nun insbesondere $Z = X$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

(c) Es seien f, g bijektiv. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f$ bijektiv ist und dass durch $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrfunktion von $g \circ f$ gegeben ist.

H9: (3+3 Punkte)

Es seien $X, Y \neq \emptyset$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

(i) f ist genau dann injektiv, wenn ein $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) f ist genau dann surjektiv, wenn ein $g\colon Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.