L. Frerick / M. Müller

WS 2016/17
15.11.2016

4. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 22.11.16, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T3: Es sei $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ versehen mit einer Verknüpfung $+$, die durch $0 + 0 := 1 + 1 := 0$, $0 + 1 := 1 + 0 := 1$ definiert ist. Zeigen Sie, dass für $+$ in $\mathbb{F}_2$ das Kommutativ- und Assoziativgesetz erfüllt sind und dass es bzgl. $+$ ein Nullelement sowie zu jedem $x \in \mathbb{F}_2$ ein inverses Element gibt.

T4: (a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \right\}$$

gilt.

(b) Es sei $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ gegeben. Bestimmen Sie das zu x multiplikative inverse Element und beweisen Sie Ihre Wahl.

T5: Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Weisen Sie nach:

(a) Es gilt $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

(b) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ für alle $x, y \in K^*$.

Hausübungen

H10: (5 Punkte)

Es sei die Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ gegeben, und es seien $+$ wie in T3 und $\cdot$ wie folgt definiert $0 \cdot 1 := 1 \cdot 0 := 0 \cdot 0 := 0$, $1 \cdot 1 := 1$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

H11: (8 Punkte)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Beweisen Sie folgende Rechenregeln. Geben Sie, bis auf Kommutativität, in jedem Beweis- oder Rechenschritt das verwendete Körperaxiom bzw. die verwendete Eigenschaft (z.B. ist bei einem Aufgabenteil die Aufgabe T5, (a) hilfreich) an.

(i) Aus $x + y = x + z$ folgt $y = z$.

(ii) $-(-x) = x$.

(iii) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

(iv) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

H12: (10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man sagt, a teile b (kurz $a|b$), wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $b = a \cdot k$. Es sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir schreiben $a \equiv b \bmod m$, falls $m | (a - b)$, und nennen a kongruent zu b modulo m. Weiter setzt man

$$a + m\cdot\mathbb{Z} := \{a + m \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch $a \sim_m b :\Leftrightarrow a \equiv b \bmod m$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist. (D. h. $a \sim_m b$ wird durch $a \equiv b \bmod m$ definiert.)

(b) Es bezeichne $[a]_m$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. obiger Äquivalenzrelation. Beweisen Sie, dass $[a]_m = a + m \cdot \mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie $[a]_2$ für $a \in \mathbb{Z}$ sowie $\mathbb{Z}/\sim_2$.

(d) Wir definieren $+ : \mathbb{Z}/\sim_m \times \mathbb{Z}/\sim_m \to \mathbb{Z}/\sim_m$ durch $[a]_m + [b]_m := [a + b]_m$ und $\cdot : \mathbb{Z}/\sim_m \times \mathbb{Z}/\sim_m \to \mathbb{Z}/\sim_m$ durch $[a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m$. (Dies sind wohldefinierte Abbildungen, was Sie aber nicht zeigen müssen.) Begründen Sie, warum $(\mathbb{Z}/\sim_m, +, \cdot)$ im Allgemeinen kein Körper ist. (Tipp: Betrachten Sie dazu die Multiplikation von $\mathbb{Z}/\sim_4$ und wenden Sie z. B. T5, (a) an.)

Z1: (7 Bonuspunkte)

Es sei $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(i) Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, so ist X/R eine Zerlegung von X.

(ii) Ist $\mathscr{F}$ eine Zerlegung von X, so ist durch

$$R_{\mathscr{F}} := \left\{ (x, y) \in X \times X : \underset{M \in \mathscr{F}}{\exists} \; x, y \in M \right\}$$

eine Äquivalenzrelation auf X gegeben.