L. Frerick / M. Müller WS 2016/17
22.11.2016

5. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 29.11.16, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T6: Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

T7: Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \leq 2^n$? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Hausübungen

H13: (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \binom{m+\nu-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

ist.

(b) Berechnen Sie die Spezialfälle $m = 1$ und $m = 2$.

(c) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,(\nu+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$

gilt.

H14: (5 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Menge

$$S_n \coloneqq \{\pi\colon\ \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \pi \text{ ist bijektiv}\}$$

(Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$) hat genau $n!$ Elemente.

(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage per Induktion. Betrachten Sie für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ die Mengen

$$T_k \coloneqq \{\varphi \in S_{n+1} \colon \varphi\,(n+1) = k\}\,.$$

Überlegen Sie sich, dass T_k für alle $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ eine $n!$-elementige Menge ist (d.h. es gibt $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \ldots, n+1\}$ nach $\{1, \ldots, n+1\}$, bei denen $n+1$ auf k abgebildet wird), indem Sie feststellen, dass es zu $\varphi \in T_k$ genau eine bijektive Funktion $\psi\colon\ \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$ mit $\varphi\,(i) = \psi\,(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt. Benutzen Sie ohne Beweis: Für n-elementige Mengen A, B hat S_n gleich viele Elemente wie $\{\psi\colon A \to B \colon \psi \text{ ist bijektiv}\}$.)

H15: (10 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: Es seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt:

(i) Es gilt $x > 0_K$ genau dann, wenn $-x < 0_K$.

(ii) Aus $x, y < 0_K$ oder $x, y > 0_K$ folgt $xy > 0_K$.

(iii) Es ist $x^2 > 0_K$ genau dann, wenn $x \neq 0_K$.

(iv) Es gilt $1_K > 0_K$.

(v) Aus $0_K < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1} > 0_K$.