L. Frerick / M. Müller

WS 2016/17
6.11.2016

# 7. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 13.12.16, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

## Tutorium

T10: Geben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (so genannte Normaldarstellung) an und berechnen Sie jeweils den Betrag:

(i) $\frac{i-1}{3+i}$,

(ii) $(2+i)^3$,

(iii) $1/\overline{z}$, wobei $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

T11: Rechnen Sie nach, dass für $K = \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(K4) Es gibt ein Element $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\setminus\{0_{\mathbb{C}}\} = \mathbb{C}^*$ mit $1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(K5) Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $-z \in \mathbb{C}$ mit $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$, und für alle $z \in \mathbb{C}^*$ existiert ein $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$.

(K6) Es gilt $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

## Hausübungen

H19: (3+2+2+2 Punkte)

(a) Es seien $z = 3 - 2i$ und $w = 4 + 3i$ gegeben. Geben Sie $zw$, $\overline{z}w$, $\overline{z}/w$, $z/\overline{w}$, $1/i$ in der Normaldarstellung an.

(b) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

(i) Es ist $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

(ii) Es ist $z = -\overline{z}$ genau dann, wenn $z \in i\mathbb{R}(= \{z \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{R} : z = ix\})$ ist.

(c) Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Dann gilt

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

und für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

H20: (6 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene. (Ihr Lösungsweg muss erkennbar sein.)

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1, 1 < \operatorname{Im}(iz) < 2\}$,

(ii) $B := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{2-i}\right) = 1\right\}$.

H21: (4 Punkte)

Wir betrachten die Punkte $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1 + i/2,\ z_4 = i/2$ in der komplexen Ebene, die Eckpunkte eines Rechtecks sind. Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := 2iz$ und $g(z) := (1+i)\,z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Skizzieren Sie das Rechteck und die Punkte $f(z_j)$ sowie $g(z_j)$ für $1 \leq j \leq 4$. Beschreiben Sie, welche Auswirkung die Anwendung der Funktionen hat.