L. Frerick / M. Müller WS 2016/17
20.12.2016

9. Übung zur Einführung in die Mathematik für Lehramt und Informatik

Abgabe: bis Dienstag, 10.1.17, 8:25 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T15: (a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Ist $f(I)$ nach oben und unten unbeschränkt, so ist f surjektiv.

(b) Es seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 28 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $P(x) = r$.

T16: Untersuchen Sie die unten definierten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Existenz den Grenzwert an:

(i) $x_n = \frac{7n^6 - 3n^3 + 4n - 20}{4n^6 + 3n^3 + 41}$,

(ii) $x_n = \frac{5n^3 - 1}{n^2 + n}$,

(iii) $x_n = \frac{2^n}{4^n - 1}$,

(iv) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hausübungen

H25: (4 Punkte)

Es seien $d \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ (d.h. d sei ungerade), $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, $a_d > 0$ und $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = \sum_{\mu=0}^{d} a_\mu x^\mu \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweisen Sie, dass P surjektiv ist.

H26: (4 Punkte)

(a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Hat f positive und negative Funktionswerte, so hat f eine Nullstelle.

(b) Gilt die Aussage aus Teil (a) auch für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

H27: (6 Punkte)

Es seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zeigen Sie:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. (Diesen Grenzwert nennt man auch eulersche Zahl e.)

Wir wünschen frohe Weihnachten, einen guten Rutsch und alles Gute für 2017!