L. Frerick / M. Müller SoS 2018
25.6.2018

10. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 2.7.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 28. (4 Punkte)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Beweisen Sie: Wenn ein $z_0 \in G$ existiert mit

$$|f(z_0)| < \min_{z \in \partial G} |f(z)|,$$

dann hat f eine Nullstelle in G.

Aufgabe 29. (5 Punkte)
Es sei $f : U_1(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in U_1(0)$. Zeigen Sie:

1. Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$ und $\left|f'(0)\right| \leq 1$.
2. Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ oder $\left|f'(0)\right| = 1$, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = cz$ für alle $z \in U_1(0)$.

Hinweis: Betrachten Sie

$$g : U_1(0) \to \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \in U_1(0) \setminus \{0\}, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 30. (2+4+2+2 Punkte)
Für $R > 0$ sei $f : U_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die durch $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ gegeben sei. Wir setzen

$$M_f : [0, R) \to [0, \infty), \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} dt \qquad (r \in (0,R),\ n \in \mathbb{N}_0).$$
2. Es gilt
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt \leq M_f(r)^2 \qquad (r \in (0,R)).$$
3. Für alle $r \in (0,R)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|a_n| \leq M_f(r)/r^n$.
4. Wenn $r \in (0,R)$ und $m \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $|a_m| r^m = M_f(r)$, dann gilt $f(z) = a_m z^m$.

Aufgabe 31. (2+4 Punkte)

Es sei

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(1 - 1/z)^2}.$$

1. Weisen Sie nach, dass 0 eine hebbare Singularität von g ist.

2. Berechnen Sie für die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $f(0) = 0$ die Laurent-Entwicklung in $U_1(0)$ und $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.