L. Frerick / M. Müller SoS 2018

2.7.2018

11. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 9.7.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 32. (2+2+3+3 Punkte)
Bestimmen und klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

1. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{e^z-1}{z}$.
2. $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin\left(1/z\right)$.
3. $f : \mathbb{C}\setminus\left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\right) \to \mathbb{C},\ z \mapsto 1/\sin(1/z)$.
4. $f : \mathbb{C}\setminus\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z^2}{1-\cos(z)}$.

Aufgabe 33. (4 Punkte)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass z_0 genau dann ein Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ ist, wenn $r > 0$, $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren mit

$$C_1 |z - z_0|^{-p} \leq |f(z)| \leq C_2 |z - z_0|^{-p} \qquad (z \in U_r(z_0)\setminus\{z_0\}).$$

Aufgabe 34. (3 Punkte)
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig und so, dass $f(X)$ eine diskrete Teilmenge von Y ist (d.h. für jedes $x \in X$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(f(x)) \cap f(X) = \{f(x)\}$). Zeigen Sie, dass f konstant auf X ist

Aufgabe 35. (2+3 Punkte)
Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Für $x \in M$ sei

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : A \text{ ist zusammenhängend und } x \in A\}.$$

Beweisen Sie:

1. $Z_M(x)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von M, die x enthält.
2. Für $x, y \in M$ ist entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$.