L. Frerick / M. Müller

SoS 2018
23.4.2018

2. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 30.4.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie für Banachräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ über $\mathbb{R}$ und $f : X \to E$ die Richtungsableitungen $df(x)(r)$ $(r, x \in X)$ in den folgenden Fällen:

1. $(X, \|\cdot\|_X) = (E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$;
2. $(X, \|\cdot\|_X) = \left(\mathbb{R}^3, |\cdot|\right)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$;
3. $(X, \|\cdot\|_X) = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $f(x) = x(0)^2$.

   Hierbei ist (wie üblich)
   $$C([0,1], \mathbb{R}) = \{x\colon [0,1] \to \mathbb{R} :\ x \text{ ist stetig}\}$$
   und
   $$\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

Aufgabe 5 (5+5 Punkte)

Es sei $f = (f_1, \ldots, f_n)^T : [a,b] \to \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann regelintegrierbar, wenn f_ν für alle $1 \leq \nu \leq n$ regelintegrierbar ist. In diesem Fall gilt
   $$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \left(\int\limits_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int\limits_a^b f_n(t)\,dt \right)^T.$$
2. f ist genau dann stetig differenzierbar, wenn f_ν für alle $1 \leq \nu \leq n$ stetig differenzierbar ist. In diesem Fall ist
   $$f'(t) = \left(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\right)^T \qquad (t \in [a,b]).$$

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte)

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ Banachräume, $U \subset X$ offen und $f : U \to E$ eine Abbildung.

1. Es seien nun $x \in U$, $r \in X \setminus \{0\}$ und $A_{x,r} := \{t \in \mathbb{R} \colon x + tr \in U\}$. Zeigen Sie, dass $\alpha < 0 < \beta$ existieren mit $(\alpha, \beta) \subset A_{x,r}$.
2. Es seien $x \in U$, $r \in X \setminus \{0\}$ und (α, β) wie in 1. sowie $f_{x,r} \colon (\alpha, \beta) \to E$ definiert durch $t \mapsto f(x + tr)$. Beweisen Sie, dass f in x genau dann in Richtung r differenzierbar ist, wenn $f_{x,r}$ in 0 differenzierbar ist und dass dann $f_{x,r}'(0) = df(x)(r)$ gilt.
3. Es seien $x \in U$, $r \in X \setminus \{0\}$ und $f_{x,r}$ wie in 2. Zeigen Sie: Wenn f richtungsdifferenzierbar auf U ist, so ist $f_{x,r}$ differenzierbar und $f_{x,r}'(t) = df(x + tr)(r)$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$.