L. Frerick / M. Müller SoS 2018
30.4.2018

3. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 7.5.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 7 (3+3+3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ auf Holomorphie und geben Sie $df(z)(w)$ an.

1. $U = \mathbb{C}^n$, $f(z) = \sum_{\nu=1}^n \overline{z_\nu}$,
2. $U = \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$,
3. $U = \mathbb{C}^2$, $f(z) = z_2 \sin(z_1) + z_1 \cos(z_2)$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Es seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie, dass $f + g$, $f \cdot g$ und λf für $\lambda \in \mathbb{C}$ holomorph in U sind. Zeigen Sie auch: Hat g keine Nullstellen, so ist f/g ebenfalls holomorph.

Zur Wiederholung:
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn für alle $U, V \subset X$ offen aus $U \cap V \cap M = \emptyset$ und $M \subset U \cup V$ schon $M \subset U$ oder $M \subset V$ folgt.

Aufgabe 9 (3+3+3 Punkte)
Es seien (X, d_X) und (E, d_E) metrische Räume. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. X ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen sind.
2. Sind M_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Teilmengen von X mit $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ für alle $\alpha, \beta \in I$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ auch zusammenhängend.
3. Ist $f : X \to E$ stetig und $M \subset X$ zusammenhängend, so ist auch $f(M) \subset E$ zusammenhängend.