L. Frerick / M. Müller SoS 2018
7.5.2018

4. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 14.5.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Es seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\omega_1, \omega_2 : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ Pfaffsche Formen. ω_1 sei in reeller Schreibweise $\omega_1 = \sum_{\nu=1}^n f_\nu dx_\nu + g_\nu dy_\nu$ und ω_2 sei in komplexer Schreibweise $\omega_2 = \sum_{\nu=1}^n h_\nu dz_\nu + k_\nu d\overline{z_\nu}$ gegeben. Geben Sie ω_1 in komplexer und ω_2 in reeller Schreibweise an. (Hinweis: Berechnen Sie für $z \in U$ und $w \in \mathbb{C}^n$ hierzu $\omega_1(z)(w)$ unter Verwendung der komplexen Schreibweise und $\omega_2(z)(w)$ unter Verwendung der reellen Schreibweise.)

Aufgabe 11. (3+3+5 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

1. $\int_\gamma -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_3^2 dx_3$, wobei $\gamma(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{t}{2}\right)^T$, $t \in [0, 2\pi]$,
2. $\int_\gamma x_1^2 dx_1 + x_2^3 dx_2$, wobei $\gamma(t) = (2t, 4t)^T$, $t \in [0, 1]$,
3. $\int_\gamma x_1 x_2 dx_1 + x_2 \cos(2\pi x_1) dx_2$, wobei γ ein polygonaler Weg durch die Punkte $(0,0)^T$, $(2,0)^T$, $(2,1)^T$, $(0,1)^T$ und $(0,0)^T$ sei, also

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0)^T + t(2,0)^T, & t \in [0,1], \\ (2,0)^T + (t-1)\left((2,1)^T - (2,0)^T\right), & t \in [1,2], \\ (2,1)^T + (t-2)\left((0,1)^T - (2,1)^T\right), & t \in [2,3], \\ (0,1)^T + (t-3)(0,-1)^T, & t \in [3,4]. \end{cases}$$

Aufgabe 12. (6 Punkte)
Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $U \subset X$ offen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Je zwei Punkte in U lassen sich durch einen Polygonzug in U verbinden. (U heißt dann *polygonzusammenhängend*.)
2. Je zwei Punkte in U lassen sich durch eine Kurve in U verbinden. (U heißt dann *wegzusammenhängend*.)
3. U ist zusammenhängend.

(Hinweis: Sie dürfen ohne weiteren Nachweis verwenden, dass Intervalle in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind. Zeigen Sie für die Implikation „3. ⇒ 1.“, dass für $x \in U$ die Menge

$$A_x = \{y \in U : \text{ Es gibt einen Polygonzug, der } x \text{ und } y \text{ verbindet}\}$$

offen und abgeschlossen in U ist.)