L. Frerick / M. Müller SoS 2018

28.5.2018

6. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 4.6.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 16. (Es reicht, wenn Sie 1. und einen weiteren Aufgabenteil bearbeiten. Die übrigen Aufgabenteile werden als Bonusaufgaben gewertet.) (4+4 Punkte)
Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

1. Zeigen Sie, dass auch die Potenzreihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^{\nu-1}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} (z-z_0)^{\nu+1}$ Konvergenzradius R haben.
2. (Umordnung von Potenzreihen) Es sei $z_1 \in U_R(z_0)$. Beweisen Sie mithilfe des Doppelreihensatzes: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Reihe
$$b_k := \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z_1 - z_0)^{\nu-k},$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_1)^k$, und es gilt
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_1)^k.$$
3. Es seien $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < R\}$ und $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$. Zeigen Sie induktiv, dass f in jedem $z \in U_R(z_0)$ unendlich oft stetig komplex differenzierbar ist und dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$
$$f^{(k)}(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} k! a_\nu (z-z_0)^{\nu-k} \qquad (z \in U_R(z_0))$$
gilt.
4. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie
$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq R \leq \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Aufgabe 17. (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:
$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \log(\nu) z^\nu, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^\nu (\nu!)^2} z^\nu, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}.$$

Aufgabe 18. (8 Punkte)
Es seien X ein Banachraum und $U \subset X$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass für zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [\alpha, \beta] \to U$ mit
$$\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) = x \quad \text{und} \quad \gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) = y$$
durch
$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \gamma_0 \text{ und } \gamma_1 \text{ sind homotop}$$
eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis folgende Aussage: *Es seien X, Y Banachräume, $A, B \subset Y$ abgeschlossen sowie $f_1 : A \to X$, $f_2 : B \to X$ stetige Abbildungen mit $f_1|_{A\cap B} = f_2|_{A\cap B}$. Dann ist*
$$f : A \cup B \to X,\ y \mapsto \begin{cases} f_1(y), & y \in A, \\ f_2(y), & y \in B, \end{cases}$$
wohldefiniert und stetig.)