L. Frerick / M. Müller SoS 2018
4.6.2018

7. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 11.6.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 19. (5 Punkte)
Es sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Polarkoordinatendarstellung

$$\gamma(t) = \rho(t) e^{it} \qquad (t \in [0,2\pi]).$$

Zeigen Sie:

$$\frac{1}{i} \int_\gamma \overline{\zeta} d\zeta = \int_0^{2\pi} \rho(t)^2 dt.$$

Aufgabe 20. (3+3+3 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad (z \neq \pm i).$$

1. Skizzieren Sie $G := \mathbb{C} \setminus \{it\colon\ t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$ und weisen Sie nach, dass f auf G eine Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ hat.
2. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von F mit Entwicklungsmitte $z_0 = 0$.
3. Existiert auch auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ eine Stammfunktion von f?

Aufgabe 21. (3+3+2 Punkte)

1. Es seien $G_1 := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R}\colon\ t \leq 0\}$ und $G_2 := \mathbb{C} \setminus \{it\colon\ t \in \mathbb{R},\ t \leq 0\}$. Berechnen Sie
$$\log^{G_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\right) \quad \text{und} \quad \log^{G_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\right).$$
2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin G$ und $1 \in G$. Zeigen Sie, dass für jede zusammenhängende Teilmenge $W \subset \exp^{-1}(G)$ ein eindeutig bestimmtes $k(W) \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass
$$\log^G(\exp(z)) = z + 2\pi i k(W)$$
für alle $z \in W$ gilt. Zeigen Sie zudem, dass $k(W) = 0$ ist, falls $0 \in W$.
3. Am Schluss eines Briefes vom 17. Juni 1746 an Goldbach schreibt Euler:
„Letztens habe gefunden, dass diese espressio $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ *einen valorem realem habe, welcher in fractionibus decimalibus = 0,2078795763, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.“*
(vgl. Correspondance Leonhard Euler et Chr. Goldbach 1729-1763, in *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du* XVIIIième *siècle*, ed. P.H. Fuss, St. Pétersbourg 1843, Bd. 1, S. 383.)

   Was sagen Sie dazu?

Bemerkung: $\log^G$ ist stets so gewählt, dass $\log^G(1) = 0$ ist.