

8. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 18.6.18, 12 Uhr in Kasten E 11.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 22.

(6 Punkte)

Für $r > 0$ sei wie üblich $U_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ und $B_r(0) := \overline{U_r(0)}$. Es seien $f : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $U_r(0)$ sowie $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \partial B_r(0)$ definiert durch $t \mapsto re^{it}$. Beweisen Sie:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in U_r(0)).$$

(Hinweis: Es seien $z \in U_r(0)$ und $|z| < R \leq r$. Betrachten Sie

$$g_R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z} e^{it},$$

und zeigen Sie zunächst, dass

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |g_R(t) - g_r(t)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow r)$$

gilt.)

Aufgabe 23.

(3+3+3 Punkte)

Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $r > 0$ mit $B_r(0) \subset U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$, $t \mapsto re^{it}$.

1. Zeigen Sie, dass

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta$$

für alle $a, b \in U_r(0)$ mit $a \neq b$ gilt.2. Es seien nun $U = \mathbb{C}$ und $r = 1$ sowie $|a| \notin \{0, 1\}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)(\zeta - 1/a)}.$$

3. Es mögen die Voraussetzungen von 2. gelten. Berechnen Sie (mithilfe von 2.)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos(t) + a^2}.$$

Aufgabe 24.

(2+3+3 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$(i) \int_{|z|=e} \frac{\sin(z)}{z} dz, \quad (ii) \int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz, \quad (iii) \int_{|z-3|=2} \left(\frac{z}{z-e}\right)^n dz \quad (n \in \mathbb{N}).$$