L. Frerick / M. Müller

SoS 2018
18.6.2018

9. Übung zur Einführung in die Funktionentheorie

Abgabe: bis Montag, 25.6.18, 12 Uhr in Kasten E 11.
Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 25. (3+3 Punkte)

1. Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ganzer Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ und $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve. Zeigen Sie: Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf $|\gamma|$ für $n \to \infty$, so ist $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$.

2. Es sei $g : S^1 \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$. Existiert eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $P_n \to g$ gleichmäßig auf S^1 für $n \to \infty$? (Hierbei ist wie üblich S^1 der Einheitskreis.)

Aufgabe 26. (4+4 Punkte)

1. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \subset I$ mit Häufungspunkt in I sowie $f, g : I \to \mathbb{K}$ beliebig oft differenzierbar mit
$$f(x) = g(x) \qquad (x \in A).$$
Entscheiden Sie (mit Beweis), ob dann schon $f = g$ auf I folgt.

2. Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : U_1(0) \to \mathbb{C}$ gibt mit
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27. (3+4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Wir setzen
$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r \geq 0).$$

1. Es sei $f(z) = \sin(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $M_f(r)$ für $r > 0$.

2. Zeigen Sie: Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass
$$\frac{M_f(r)}{r^n} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$
gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n-1$.