L. Frerick/ M. Müller

WS 2017/18
18.10.2017

1. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 24.10.17, 12 Uhr in Kasten E 11 (neben Raum E 44).

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!
Tackern oder heften Sie bitte die abgegebenen Zettel zusammen!

H1: (6 Punkte)

Es seien $M_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $M_2 = \{\heartsuit, \square, \gamma\}$, $M_3 = \{\alpha, \{\alpha\}, M_1\}$, $M_4 = \{\emptyset, \{M_1\}, 1\}$. Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Schreibweise an: $M_1 \cap M_2$, $M_2 \backslash M_1$, $M_3 \cap M_4$, $M_4 \backslash \{\emptyset\}$, $M_1 \cup \emptyset$ und $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$. (z.B. $M_1 \cap M_3 = \{\alpha\}$ oder $M_1 \cup M_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \{\alpha\}, M_1\}$)

H2: (3+3+3 Punkte)

Es seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie:

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(ii) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$,

(iii) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

H3: (4 Punkte)

Für zwei Mengen A und B sei $A \triangle B$ definiert durch

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Zeigen Sie, dass

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

gilt.

H4: (6 Punkte)

Es seien A, B Teilmengen einer Menge X. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $A \subset B$,

(ii) $A \cap B = A$,

(iii) $A \cup B = B$,

(iv) $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$,

(v) $(X \backslash A) \cup B = X$.

(Hinweis zu H4: Es reicht zu zeigen: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i). „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ bedeutet dabei: „Aus Aussage (i) folgt Aussage (ii).“)

Allgemeine Hinweise:

- Machen Sie sich bitte bei allen Aufgaben klar, was die Voraussetzungen sind und was Sie damit zeigen/beweisen sollen. (Etwa bei der H2 haben Sie die Voraussetzung, dass A, B, C Mengen sind, um beispielsweise $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ zu zeigen. Orientieren Sie sich am besten an der Vorlesung, in der das andere Distributivgesetz exemplarisch bewiesen wurde. Wenn Sie bei der H4 die Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (iii)" zeigen wollen, dürfen Sie nur die Voraussetzungen verwenden, dass A und B Teilmengen einer Menge X sind (was Sie in diesem Falle nicht brauchen werden) und $A \cap B = A$ gilt, um die Aussage $A \cup B = B$ zu zeigen.)

- Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente besitzen. Wenn wir also für Mengen A, B, C (Voraussetzung) die Aussage $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ zeigen sollen, so müssen wir nachweisen, dass $A \cap (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cap C$ dieselben Elemente haben. Häufig ist es einfacher nicht direkt „=", sondern nacheinander „$\subset$" und „$\supset$" zu zeigen.

- Schreiben Sie Ihre Lösungen/Beweise bitte so auf, dass es für Leser (in Ihrem Fall die KorrekteurInnen) möglich ist, Ihre Gedankengänge nachzuvollziehen. Verknüpfen Sie daher in Ihren Beweisen bitte einzelne Beweisschritte logisch miteinander. (Reihen Sie bitte NICHT einzelne Aussagen ohne logische Verbindung aneinander.) Sie können die logischen Verknüpfungen mit Worten (z.B. „aus Aussage (I) folgt Aussage (II)" oder „Aussage (1) ist äquivalent zu Aussage (2)") oder symbolisch (z.B. „(I) $\Rightarrow$ (II)" oder „(1) $\Leftrightarrow$ (2)") herstellen. Verwenden Sie Folgerungs- und Äquivalenzpfeile jedenfalls nur bei Aussagen. (Etwa „$A \cup B = B$" ist eine Aussage; jedoch „$A \cup B$" ist keine Aussage.)

- Exemplarisch zeigen wir hier für drei Mengen A, B, C die Aussage

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Beweis:

1. Variante (mit Worten): Es gilt $x \in A \cap (B \cap C)$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in B \cap C$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in A$ und ($x \in B$ und $x \in C$) ist. Das ist äquivalent zu ($x \in A$ und $x \in B$) und $x \in C$. Dieses ist äquivalent zu $x \in A \cap B$ und $x \in C$, was letztlich äquivalent zu $x \in (A \cap B) \cap C$.

2. Variante (mit Symbolen): Es gilt

$$\begin{aligned} & x \in A \cap (B \cap C) \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ und } x \in B \cap C \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ und } (x \in B \text{ und } x \in C) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ und } x \in C \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B \text{ und } x \in C \\ \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Aus den beiden gleichwertigen Varianten geht hervor, dass $A \cap (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cap C$ dieselben Elemente besitzen und somit gleich sind.