L. Frerick/ M. Müller

WS 2017/18
9.1.2018

10. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 16.1.18, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H35: (3+3 Punkte)

Prüfen Sie, ob in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren x, y, z linear unabhängig sind.

(i) $x = (1, 1, -1)^T$, $y = (-1, 2, -1)^T$, $z = (-1, -2, 3)^T$;

(ii) $x = (1, 1, -2)^T$, $y = (-1, 2, -1)^T$, $z = (-1, -2, 3)^T$.

H36: (3+5 Punkte)

Es seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K. Auf $V \times W$ seien $+ : (V \times W) \times (V \times W) \to V \times W$ und $\cdot : K \times (V \times W) \to V \times W$ definiert durch

$$\begin{aligned} (v_1, w_1) + (v_2, w_2) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \\ \alpha \cdot (v_1, w_1) &= (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot w_1) \end{aligned}$$

für $(v_1, w_1)\,, (v_2, w_2) \in V \times W$ und $\alpha \in K$.

(i) Überlegen Sie sich, dass $(V \times W, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist, indem Sie exemplarisch das Assoziativ- und Kommutativgesetz bzgl. $+$ sowie eines der Distributivgesetze nachweisen.

(ii) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V sowie $y_1, \ldots, y_m$ eine Basis von W. Zeigen Sie, dass

$$(x_1, 0)\,, \ldots, (x_n, 0)\,, (0, y_1)\,, \ldots, (0, y_m)$$

eine Basis von $V \times W$ ist.

H37: (5 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und x_1, x_2, x_3 eine Basis von V. Wir definieren $y_1 \coloneqq x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 \coloneqq x_1 + x_2 + 3x_3$, $y_3 \coloneqq x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $y_4 \coloneqq x_1 - 2x_2 - 5x_3$. Überprüfen Sie, ob y_1, y_2, y_3 und $y_1, y_{3,} y_4$ auch Basen von V sind.

H38: (5 Punkte)

Ergänzen Sie folgende linear unabhängige Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$: $(1, 2, 1, 2)^T$, $(-1, 2, -1, 2)^T$, $(1, -2, -1, 2)^T$. (Die lineare Unabhängigkeit dieser drei Vektoren müssen Sie nicht nachrechnen.)