L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18

16.1.2018

11. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 23.1.18, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H39: (1+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $f(x) = A \cdot x$.

(ii) Berechnen Sie $\ker(f)$ und $\dim(\ker(f))$.

(iii) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

(iv) Es sei $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ y \mapsto B \cdot y.$$

Geben Sie die Funktionsvorschrift von $g \circ f$ an.

H40: (6+3 Punkte)

(a) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität:

(i) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_3)^T$ (wobei $K = \mathbb{R}$).

(ii) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ (unterscheiden Sie die Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$)

(iii) $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ (wobei $K = \mathbb{R}$). Zeigen Sie auch, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist. (Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge der Folgen in $\mathbb{R}$.)

(b) Es seien A, B Mengen, $\psi\colon A \to B$ eine Abbildung und K ein Körper. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\Phi\colon K^B \to K^A,\ f \mapsto f \circ \psi$$

ist linear (d.h. zu zeigen: für $f, g \in K^B$ und $\lambda \in K$ gilt $\Phi(\lambda f + g)(a) = \lambda \Phi(f)(a) + \Phi(g)(a)$ für alle $a \in A$).

H41: (3+3+3 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt eine Abbildung

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,$$

wobei $\alpha_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$, Polynom . Ist $\alpha_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p. Im Falle $\alpha_k = 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ wird p der Grad $-\infty$ zugeordnet (in diesem Falle ist p die Nullfunktion). Wir setzen

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} : p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq n \right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_n$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ über $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $p_k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $p_k(z) := z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weisen Sie nach, dass durch $p_0, p_1, \ldots, p_n$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ gegeben ist. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein Polynom p vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens n Nullstellen besitzt, d.h. es gibt höchstens n verschiedene $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_j) = 0$, wobei $1 \leq j \leq n$.)

(iii) Es sei $D \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1},\ p \mapsto p'$ eine Abbildung, wobei p' für $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ durch

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k z^{k-1} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

definiert sei (Ableitung von p). Zeigen Sie, dass D linear ist (d.h. für $p, q \in \mathcal{P}_n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda p + q)'(z) = \lambda p'(z) + q'(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$).