L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18
23.1.2018

12. Übung zur Linearen Algebra

– Wiederholungsblatt –

Abgabe: bis Dienstag, 30.1.18, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H42: (4 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Finden Sie eine LR-Zerlegung von A.

(ii) Entscheiden Sie (mit Begründung), ob A invertierbar ist.

H43: (4 Punkte)

Überprüfen Sie für $t \in \mathbb{R}$ folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ auf lineare Unabhängigkeit:

$$x_1 = \left(1, 1, 1\right)^T,\ x_2 = \left(0, 1, t\right)^T,\ x_3 = \left(1, -t, t^2 + 1\right)^T.$$

H44: (4 Punkte)

Es seien K ein Körper und $b \in K$ beliebig, aber fest gewählt. Unter welcher Bedingung an b ist die Abbildung $\Phi\colon K^{\mathbb{R}} \to K$, $f \mapsto f(2) + b$, linear? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

H45: (5 Punkte)

Es sei

$$\mathcal{U}(n) \coloneqq \left\{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^{-1} = A^H\right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{U}(n)$ versehen mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

H46: (5 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{P}_3 = \left\{p \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}\colon p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 3\right\}$. Untersuchen Sie, ob $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_3$, definiert durch

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x(x+1), \\ p_2(x) &= x^2(x-1), \\ p_3(x) &= x^3 - 1, \end{aligned}$$

linear unabhängig sind, und ergänzen Sie gegebenenfalls zu einer Basis des $\mathcal{P}_3$. (Benutzen Sie, dass bei einem Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ mit $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sämtliche Koeffizienten gleich 0 sind.)

H47: (5 Punkte)

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der üblichen argumentweise definierten Addition und Skalarmultiplikation.

(i) Für jedes $k \in \{1,2,3\}$ sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - k$. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear abhängig sind.

(ii) Beweisen Sie, dass

$$W := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \underset{x \in \mathbb{N}}{\forall} \quad f(x) = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist.

(iii) Finden Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $\phi|_W = 0$ und $\phi(f_1) = 1$.

H48: (5 Punkte)

Offenbar sind $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (1,1,0)^T$, $v_3 = (1,1,1)^T$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Bilden Sie die duale Basis. (D.h. finden Sie Linearformen v_1^*, v_2^*, v_3^* mit $v_j^*(v_k) = \delta_{jk}$ für $1 \leq j, k \leq 3$.)