L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18
24.10.2017

2. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 7.11.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!
Tackern oder heften Sie bitte die abgegebenen Zettel zusammen!

H5: (2+3+3 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $M, N \subset Y$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Aus $M \subset N$ folgt $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$.

(ii) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

(iii) $f^{-1}(M \backslash N) = f^{-1}(M) \backslash f^{-1}(N)$.

H6: (2+3+3 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $A, B \subset X$ und $M \subset Y$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.

(ii) $A \subset f^{-1}(f(A))$ und $f\left(f^{-1}(M)\right) \subset M$.

(iii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Zeigen Sie zudem anhand eines Beispiels, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

H7: (2+2+3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. (Begründen Sie Ihre Ergebnisse.)

(i) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$,

(ii) $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^2$,

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{falls } x \text{ gerade (d.h. es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2m) \\ -\frac{x-1}{2}, & \text{falls } x \text{ ungerade (d.h. es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2m-1). \end{cases}$

H8: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $\varphi\colon \{a, b, c, d, e, f\} \to \{\triangle, \square, \heartsuit, *, \bigcirc\}$, die durch

$$\begin{array}{lll} \varphi(a) := \triangle, & \varphi(c) := \square, & \varphi(e) := \heartsuit, \\ \varphi(b) := \square, & \varphi(d) := *, & \varphi(f) := \triangle, \end{array}$$

definiert ist. Bestimmen Sie $\varphi(\{a, d, e\})$, $\varphi(\{c, f\})$, $\varphi(\{a, b, c\})$ sowie $\varphi^{-1}(\{\square, \heartsuit, \bigcirc\})$, $\varphi^{-1}(\{*\})$ und $\varphi^{-1}(\{\bigcirc\})$. Ist φ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

H9: (3 Punkte)

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Abbildungen, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist mit Umkehrabbildung $f^{-1} = g$.