L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18

7.11.2017

3. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 14.11.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H10: (4+4 Punkte)

(i) Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass $2^A \cup 2^B \subset 2^{A\cup B}$ ist und im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(ii) Bestimmen Sie für $A = \{a, b, c, d\}$ die Potenzmenge 2^A.

H11: (4+4 Punkte)

Es sei X eine Menge, $B \subset X$ und $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf X. Beweisen Sie folgende Aussagen:

$$\text{(i) } B \cap \left(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M \right) = \bigcup_{M\in\mathscr{F}} (B \cap M) \text{ und (ii) } B\backslash \left(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M \right) = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} (B\backslash M)\,.$$

H12: (3+3+2 Punkte)

Überprüfen Sie, ob folgende Relationen auch Äquivalenzrelationen sind. (Begründen Sie Ihre Antworten.)

(i) $R_p \subset \mathbb{Z}^2$, wobei $p \in \mathbb{N}$ fest gewählt sei, mit $(x, y) \in R_p$ genau dann, wenn

$$x^p - y^p = px - py,$$

(ii) $R_m \subset \mathbb{Z}^2$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt sei, mit $(x, y) \in R_m$ genau dann, wenn

$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\, mk = x - y,$$

(iii) $R \subset \mathbb{N}^2$ mit $(x, y) \in R$ genau dann, wenn $\underset{a,b\in\mathbb{N}}{\exists}\, x = ay^b$.

H13: (6 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 2.1.7 aus der Vorlesung:

Es sei $(G, *)$ eine Halbgruppe, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Es gibt ein $e \in G$ mit $e * a = a$ für alle $a \in G$;

(ii) zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a' * a = e$.

Dann ist $(G, *)$ schon eine Gruppe.