L. Frerick/ M. Müller

WS 2017/18
14.11.2017

4. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 21.11.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T1: Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenmorphismus. Zeigen Sie: Ist $V \subset H$ eine Untergruppe, so ist auch $\varphi^{-1}(V) \subset G$ eine Untergruppe.

T2: Für $1 \le k \le 3$ sei $\tau^{(k)} \in S_4$ die Transposition, die k mit $k+1$ tauscht, also

$$\tau^{(k)}(k) = k+1,\ \tau^{(k)}(k+1) = k \text{ und}$$
$$\tau^{(k)}(j) = j \text{ für } j \ne k \text{ und } j \ne k+1.$$

Bestimmen Sie

n	1	2	3	4
$\tau^{(1)}(n)$				

,

n	1	2	3	4
$\tau^{(2)}(n)$				

,

n	1	2	3	4
$\tau^{(2)} \circ \tau^{(1)}(n)$				

.

Hausübungen

H14: (8 Punkte)

Es seien $(G, *_G)$ eine Gruppe und $M \ne \emptyset$ eine Menge. Ferner seien $*_M\colon M \times M \to M$ eine Verknüpfung und $f\colon G \to M$ eine Abbildung so, dass $f(a *_G b) = f(a) *_M f(b)$ für alle $a, b \in G$. Beweisen Sie, dass $(f(G), *_M)$ eine Gruppe ist.

H15: (4 Punkte)

Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}\colon H \to G$ ebenfalls ein Gruppenisomorphismus ist. (Zur Wiederholung: Ein Gruppenisomorphismus ist ein bijektiver Gruppenmorphismus.)

H16: (6+2 Punkte)

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Für jedes $a \in G$ definieren wir die Abbildung

$$f_a\colon G \to G,\ x \mapsto a^{-1} * x * a.$$

(i) Beweisen Sie, dass für alle $a \in G$ die Abbildung f_a ein Gruppenisomorphismus ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass $f_a \circ f_b = f_{b*a}$ für alle $a, b \in G$ ist.

H17: (5 Punkte)

Es sei $\sigma \in S_4$ gegeben durch

n	1	2	3	4
$\sigma(n)$	2	4	1	3

.

Zeigen Sie, dass sich σ als endliche Komposition von Transpositionen $\tau^{(k)}$ (wie in T2) mit $1 \le k \le 3$ darstellen lässt. Ist eine solche Darstellung eindeutig? (Begründen Sie Ihre Antwort.)