L. Frerick/ M. Müller

WS 2017/18
21.11.2017

5. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 28.11.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T3: Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Beweisen Sie: Es gilt $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in R$.

T4: Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt nullteilerfrei, wenn für $x, y \in R$ aus $xy = 0$ schon $x = 0$ oder $y = 0$ folgt. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Addition und Multiplikation aus Beispiel 2.2.2 nicht nullteilerfrei ist.

Hausübungen

H18: (6 Punkte)

Es sei $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist Permutation.

H19: (3+2+4+2 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\tau^{(j,k)}$ die Transposition in S_n, die j und k tauscht für $1 \leq j, k \leq n$. Es sei nun S_n mit $n \geq 2$.

(i) Bestimmen Sie für $l < m$ die Fehlstände, die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von $\tau^{(l,m)}$.

(ii) Für welchen Satz aus der Vorlesung stellt Teil (i) einen alternativen Beweis dar?

(iii) Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-r+1 & n-r+2 & \cdots & n \\ r & \cdots & n & 1 & \cdots & r-1 \end{pmatrix} \in S_n$$

für $1 \leq r \leq n$.

(iv) Geben Sie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

als eine Komposition von Transpositionen an.

H20: (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Hat R ein Einselement 1 (bzgl. der Multiplikation) und mindestens 2 Elemente, so gilt $1 \neq 0$.

(ii) Für $x, y \in R$ gilt $(-x)\,y = x\,(-y) = -\,(xy)$. (Daher setzt man $-xy := -\,(xy)$.)

(iii) Für $x, y \in R$ gilt $(-x)\,(-y) = xy$.

(iv) Für $x, y, z \in R$ gilt $x\,(y - z) = xy - xz$.