L. Frerick/ M. Müller

WS 2017/18
28.11.2017

6. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 5.12.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T5: Es seien $v, w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) $(v + w) + z = v + (w + z)$,

(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(iii) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}\,(z - \overline{z})$,

(iv) $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z| = |-z| = |\overline{z}|$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ $(z \neq 0)$.

Hausübungen

H21: (4+10 Punkte)

a) Es seien $w = 2 + 4i$ und $z = 3 - i$. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ sind, an (so genannte Normaldarstellung): z^2, $\overline{z} + w$, $\overline{z \cdot \overline{w}}$, w/i. Bestimmen Sie auch $|z|$,$|w|$, $|z + \overline{w}|$ und $|izw|$.

b) Es seien $v, w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) $(v + w)\, z = vz + wz$.

(ii) Zu $w \neq 0$ existiert ein $w' \in \mathbb{C}$ mit $w'w = ww' = 1\,(= 1 + i0)$.

(iii) $|zw| = |z|\,|w|$.

(iv) $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(vi) Es gilt $z^2 = |z|^2$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

H22: (3+3 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene. (Ihr Lösungsweg muss erkennbar sein.)

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(iz) \leq 1, 1 < \mathrm{Im}\,(iz) < 2\}$,

(ii) $B := \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z+i}{2-i}\right) = 1\right\}$.

H23: (8 Punkte)

(i) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte (auch von Matrizen mit sich selbst).

(ii) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an, so dass A und B nicht die Nullmatrix sind, aber $AB = 0$ ist.