L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18

5.12.2017

7. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Dienstag, 12.12.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Tutorium

T6: (i) Sind für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte AB oder BA symmetrisch?

(ii) Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ die Produkte AA^T und A^TA.

T7: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(i) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ Diagonalmatrizen. Zeigen Sie, dass AB und BA Diagonalmatrizen sind und $AB = BA$ gilt.

(ii) Überlegen Sie sich, dass eine Diagonalmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle ihre Diagonaleinträge von 0 verschieden sind.

Hausübungen

H24: (8 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper .

(i) Beweisen Sie: Für alle $A \in K^{m\times n}$ sind die Produkte AA^T und A^TA symmetrisch.

(ii) Prüfen Sie für $n \geq 2$, ob

a) $S \coloneqq \{A \in GL_n(K) : A \text{ symmetrisch}\}$ und

b) $G \coloneqq \left\{A \in GL_n(K) : A^T = A^{-1}\right\}$

Gruppen bzgl. der Matrixmultiplikation sind.

H25: (8 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(i) Es sei $D \in K^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{jj} \neq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. Bestimmen Sie die Inverse zu D.

(ii) Es sei $A \in K^{m\times n}$. Weiter seien $D \in K^{m\times m}$ und $F \in K^{n\times n}$ Diagonalmatrizen. Zeigen Sie: $DA = \begin{pmatrix} d_{11}a^1 \\ \vdots \\ d_{mm}a^m \end{pmatrix}$ und $AF = \left(f_{11}a_1, \ldots, f_{nn}a_n\right)$, wobei a^j die j-te Zeile für $1 \leq j \leq m$ und a_k die k-te Spalte für $1 \leq k \leq n$ bezeichne.

(iii) Finden Sie ein $B \in K^{n\times n}$, so dass für alle $A \in K^{m\times n}$

$$AB = \left(0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0\right)$$

gilt, wobei a_j auch im Produkt AB an j-ter Stelle stehen soll.

H26: (10 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $Z(a,b)$ definiert durch

$$Z(a,b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichne $\mathcal{C}$ die Menge aller Matrizen dieser Gestalt.

(i) Berechnen Sie $Z(0,1) \cdot Z(0,1)$.

(ii) Berechnen Sie für $Z(a,b),\ Z(c,d) \in \mathcal{C}$ die Matrizen $Z(a,b) + Z(c,d)$ und $Z(a,b) \cdot Z(c,d)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C},\ z \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$, eine bijektive Abbildung mit

$$\varphi(z+w) = \varphi(z) + \varphi(w),$$
$$\varphi(z \cdot w) = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist.