L. Frerick/ M. Müller WS 2017/18
12.12.2017

8. Übung zur LINEAREN ALGEBRA

Abgabe: bis Dienstag, 19.12.17, 12 Uhr in Kasten E 11 .

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

H27: (5 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind, und geben Sie in diesem Falle die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 7/5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

H28: (6 Punkte)

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α alle $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & +\alpha x_2 & +6x_3 & = & 6, \\ -x_1 & +3x_2 & +(\alpha-3)\,x_3 & = & 0. \end{array}$$

H29: (12 Punkte)

Es seien $P_{ij} \in K^{m\times m}$ und $G_j\left(l\right) \in K^{m\times m}$ für $1 \leq i, j \leq m$ die in der Vorlesung definierten Permutations- und Frobeniusmatrizen. Beweisen Sie:

(i) Für $A \in K^{m\times n}$ entspricht $P_{ij}A$ der $m \times n$-Matrix, die durch Vertauschung der Zeilen i und j entsteht, und für $B \in K^{n\times m}$ entspricht BP_{ij} der $n \times m$-Matrix, die durch Vertauschung der Spalten i und j entsteht. (Sie müssen nur ein Resultat beweisen.)

(ii) Für $1 \leq j < m$ ist $G_j\left(l\right)A$, wobei $l = (l_1, \ldots, l_{m-j})^T \in K^{(m-j)\times 1}$, die Matrix, die aus A entsteht, wenn man das l_i-Fache der j-ten Zeile von A zur $(j+i)$-ten Zeile von A hinzuaddiert für alle $1 \leq i \leq m-j$.

(iii) Es gilt $G_j\left(l\right)^{-1} = G_j\left(-l\right)$ für alle $l \in K^{(m-j)\times 1}$.

(iv) Für $1 \leq k < i < j$ und mit

$$P_{ij}^k := P_{i-k,j-k} \in K^{(m-k)\times(m-k)}$$

gilt

$$P_{ij}G_k\left(l\right) = G_k\left(P_{ij}^k l\right)P_{ij}$$

für alle $l \in K^{(m-k)\times 1}$.

H30: (5 Punkte)

(i) Bilden Sie eine LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie ohne die Inverse zu bestimmen, dass A invertierbar ist.