Probeklausur II

A1 Beweis mit vollständiger Induktion: $\underline{n=1}$: $\prod_{\nu=1}^{1} \frac{\nu}{\nu+2} = \frac{1}{3} = \frac{2}{2\cdot 3}$

$\underline{n \to n+1}$: $\prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\nu}{\nu+2} = \underbrace{\left(\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{\nu+2}\right)}_{\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{2}{(n+1)(n+2)}} \cdot \frac{n+1}{n+3} = \frac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{n+3} = \frac{2}{(n+1+1)(n+1+2)}$

A2 (i) Induktion: $\underline{n=1}$; $a_1 = 0$ ✓; $\underline{n \to n+1}$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}\underbrace{a_n}_{<2\pi} + \frac{\pi}{2} \overset{\text{I.A.}}{<} \frac{3\cdot 2\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

(ii) $a_{n+1} - a_n > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{\pi}{2} - a_n = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{4}a_n}_{< \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}} \overset{(i)}{>} 0$

(iii) Nach (i) und (ii) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und (streng) monoton wachsend $\Longrightarrow$ (HS monotone Folgen) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n =: a_\infty$

und es gilt: $a_\infty \leftarrow a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{\pi}{2} \to \frac{3}{4}a_\infty + \frac{\pi}{2}$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow a_\infty = \frac{3}{4}a_\infty + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \underline{a_\infty = 2\pi}$

A3 (i) $\forall_{\nu\in\mathbb{N}}$ $\sqrt[\nu]{\frac{\nu^5}{5^\nu}} = \underbrace{\sqrt[\nu]{\nu}}_{\to 1\ (\nu\to\infty)}{}^5 \cdot \frac{1}{5} \to \frac{1}{5} < 1$ $(\nu \to \infty)$

$\Longrightarrow$ (Wurzelkriterium) Die Reihe ist absolut konvergent

(ii) $a_\nu = \frac{1}{\nu \ln(\nu^2)}$. Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln((2^k)^2)}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^{2k})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \ln(2)} = \frac{1}{2\ln(2)} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{harmonische Reihe}}$ ist divergent

$\Longrightarrow$ (Cauchyscher Verdichtungssatz H26) $\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu$ divergent

(iii) 1. Fall: $|z| > 1$: $\frac{z^\nu}{\nu^3} \not\to 0$ $(\nu \to \infty) \Longrightarrow$ Reihe divergent

2. Fall: $|z| \leq 1$: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|z|^\nu}{\nu^3} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \underset{\text{Vorlesung}}{<} \infty \underset{\text{Majorantenkriterium}}{\Longrightarrow}$ Reihe absolut konvergent

A4 (i) Vorlesung: ln und exp streng monoton wachsend (*)

$\Longrightarrow \forall_{\substack{x,y\in(0,\infty)\\ x<y}}$ $f(x) = \ln(x) + \exp(x) \underset{(*)}{<} \ln(y) + \exp(y) = f(y) \Longrightarrow$ Beh.

(ii) f ist stetig als Summe stetiger Funktionen und zudem gilt

$$f(x) = \underbrace{\ln(x)}_{\to\infty} + \underbrace{e^x}_{\to\infty} \to \infty \quad (x \to +\infty)$$

$$f(x) = \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} + \underbrace{e^x}_{\to 1} \to -\infty \quad (x \to 0^+)$$

$\underset{ZWS}{\Longrightarrow}$ $f((0,\infty)) \subset \mathbb{R}$ ist ein nach oben und unten unbeschränktes Intervall, d.h. $f((0,\infty)) = \mathbb{R}$, also f ist surjektiv

$\Longrightarrow$ (strenge Monotonie) f ist bijektiv, das ist die Beh.

A5 Betrachte $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^\nu}$ (Partialsummenfolge der geom. Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4^\nu}$)

$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-1/4} = 4/3$. $\Longrightarrow$ s_1 ist Minimum von M, also $s_1 = \frac{5}{4} = \min(M) = \inf(M)$.

Wir zeigen: $4/3 = \sup(M)$ und $\nexists$ Maximum von M. Klar ist, dass $4/3$ als Grenzwert einer monoton wachsenden Folge obere Schranke ist. Ist nun $1 < \tilde{s} < 4/3$, so setzen wir $\varepsilon = 4/3 - \tilde{s} > 0$ und es ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$4/3 - s_n < \varepsilon = 4/3 - \tilde{s} \Rightarrow \tilde{s} < s_n \in M \Rightarrow \tilde{s}$ keine obere Schranke.

Es ex. kein Maximum von M, da sonst $s_m = \max(M)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ wäre, aber auch $s_m < s_{m+1} \in M$ $\lightning$.

A6 Es seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$. Dann gilt

(i) Δ-Ungleichung: $d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$

$\leq d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1) + d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2)$

$= d_1(x_1,z_1) + d_2(x_2,z_2) + d_1(z_1,y_1) + d_2(z_2,y_2) = d(x,z) + d(z,y)$

(ii) Symmetrie: $d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) = d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) = d(y,x)$

(iii) $x, y \in X_1 \times X_2$ mit $x \neq y \Rightarrow x_1 \neq y_1$ oder $x_2 \neq y_2 \Rightarrow d_1(x_1,y_1) > 0$ oder $d_2(x_2,y_2) > 0$

$\Longrightarrow d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) > 0$

und $d(x,x) = d_1(x_1,x_1) + d_2(x_2,x_2) = 0$ $\quad \underset{i), ii), iii)}{\Longrightarrow}$ Beh.