L. Frerick / M. Müller

WS 2018/19
22.1.2019

Probeklausur

Keine Abgabe

Aufgabe 1 Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehung gilt:

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{\nu+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 2 Es sei $a_1 = 0$. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{3}{4} a_n + \frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

(i) $a_n < 2\pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a_{n+1} - a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ermitteln Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\text{(i)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\nu^5}{5^{\nu}}, \text{ (ii)} \quad \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot \ln(\nu^2)}, \text{ (iii)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^3} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \ln(x) + e^x$ für alle $x \in (0,\infty)$, ist streng monoton wachsend.

(ii) Für alle $c \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x_0 \in (0,\infty)$ mit $f(x_0) = c$.

Aufgabe 5 Untersuchen Sie

$$M := \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^{\nu}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf die Existenz von $\inf M$, $\min M$, $\sup M$ und $\max M$ und geben Sie diese im Falle der Existenz an.

Aufgabe 6 Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, und es sei $d\colon (X_1 \times X_2)^2 \to \mathbb{R}$ für $x, y \in X_1 \times X_2$ mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ definiert durch

$$d(x,y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ ist.