Probeklausur (Stand 18.12.18)

Die folgenden Aufgaben entsprechen typischen Klausuraufgaben zum jetzigen Stand der Vorlesung. In den nächsten Wochen werden weitere wichtige Konzepte behandelt, die auch in der Klausur geprüft werden. Beachten Sie bitte, dass in der Klausur keine Hilfsmittel zugelassen sein werden. Die Probeklausur wird am **Donnerstag, 3.1.19, um 16.00 Uhr in HS 9** besprochen.

Abgabe der Probeklausur bis Donnerstag, 3.1.19, 16 Uhr in Kasten E11.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4 = \frac{1}{30} n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right).$$

Aufgabe 2 (3+5 Punkte)

(a) Schreiben Sie $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{\nu(\nu+2)}$ als „Teleskopsumme“ und zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehung gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{\nu\,(\nu+2)} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

(b) Untersuchen Sie

$$M := \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{\nu\,(\nu+2)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf die Existenz von $\inf(M)$, $\min(M)$, $\sup(M)$ und $\max(M)$ in $\mathbb{R}$, und geben Sie diese im Falle der Existenz an.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $a_1 = 0$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n^2+1\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie:

   (i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

   (ii) $0 \le a_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = 3$ und

$$b_{n+1} := \frac{1}{2}\left(b_n^2+1\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2\,[x]$ auf die Existenz rechts- und linksseitiger Grenzwerte und auf Stetigkeit.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

(a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Hat f positive und negative Funktionswerte, so hat f eine Nullstelle.

(b) Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit positiven und negativen Funktionswerten, die keine Nullstelle besitzt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2019!