Wiederholung: Summierbarkeit und Doppelreihensatz

Definition. Es sei I eine nichtleere Menge und $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$. $(z_\iota)_{\iota\in I}$ heißt summierbar zur Summe $s \in E$, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subset I$ existiert, so dass für alle endlichen Teilmengen $M \subset \tilde{M} \subset I$

$$\left\| \sum_{\iota\in\tilde{M}} z_\iota - s \right\|_E < \varepsilon$$

gilt. Schreibweise:

$$\sum_{\iota\in I} z_\iota = s.$$

Satz (Doppelreihensatz). *Es sei $\left(a_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ eine Familie in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$, und es gelte*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \left\| a_{n,k} \right\|_E < \infty.$$

Dann ist $\left(a_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ summierbar, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$

sowie

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu}.$$