L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

**Einführung in die Funktionentheorie**

**Blatt 10**

Abgabe am 4.7. vor der Übung

Aufgabe 24: **(Schwarzsches Lemma)**

Es sei $f$ holomorph in $U_1(0)$ mit $f(0) = 0$ sowie $|f(z)| < 1$ für alle $z \in U_1(0)$.
Zeigen Sie:

i) Es gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$.

ii) Gilt weiter $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.

Hinweis: Betrachten Sie $g : U_1(0) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & \text{falls } z \in U_1(0) \setminus \{0\} \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 25:

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Definiere

$$M : [0, R) \to [0, \infty), \; M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Nach einem Korollar zur Cauchyschen Integralformel gilt

$$a_\nu r^\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-i\nu t} dt \quad (0 < r < R, \; \nu \in \mathbb{N}_0).$$

Zeigen Sie:

i) $M$ ist monoton wachsend. Weiter ist $M$ genau dann streng monoton wachsend, wenn $f$ nicht konstant ist.

ii) **(Gutzmersche Formel)**: Für $0 < r < R$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \leq M(r)^2$$

Hinweis: Es gilt $|f(re^{it})| = \overline{f(re^{it})} f(re^{it}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{a_\nu} r^\nu e^{-i\nu t} f(re^{it})$.

iii) Für alle $0 < r < R$, $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt $|a_\nu| \leq \frac{M(r)}{r^\nu}$.

iv) Gibt es ein $r \in (0, R)$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $|a_m| r^m = M(r)$, so gilt $f(z) = a_m z^m$.

v) Existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M(r) \leq M$ für alle $0 \leq r < R$, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 R^{2\nu}$.

vi) Gilt in v) auch die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel)