L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 11
Abgabe am 11.7. vor der Übung

Aufgabe 26:
Geben Sie Funktionen f an, die in 0 holomorph sind und den folgenden Bedingungen genügen bzw. zeigen Sie, dass keine solche Funktion existiert.

i) $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ und $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n+1}$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$,
ii) $f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n(n+2)}$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$,
iii) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27: (l'Hospital)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und f, g holomorph in G. Zeigen Sie: Ist $a \in G$ und sind $n_f(a)$, $n_g(a)$ die entsprechenden Ordnungen der Nullstellen, so gilt

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n_f(a) > n_g(a) \\ \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, & \text{falls } n_f(a) = n_g(a) \\ \infty, & \text{falls } n_f(a) < n_g(a) \end{cases}.$$

Aufgabe 28:
Bestimmen und klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

i) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$,
ii) $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$,
iii) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$,
iv) $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$,
v) $f(z) = \frac{z^2+i}{z^4+1}$.

Aufgabe 29:
Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f um z_0 im angegebenen Kreisring U:

i) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$, $z_0 = 0$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{0\}$ bzw. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
ii) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$, $z_0 = 1$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\} \setminus \{1\}$ bzw. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$,
iii) $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$, $z_0 = 0$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{0\}$ bzw. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
iv) $f(z) = \sinh(1/z)$, $z_0 = 0$, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.