L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 2
Abgabe am 2.5. vor der Übung

Aufgabe 4:
Es seien X, E Banachräume, $U \subset X$ offen und $f : U \to E$

i) Es sei $x \in U$ und $r \in X \setminus \{0\}$ sowie $A_{x,r} \coloneqq \{t \in \mathbb{R} : x + tr \in U\}$. Zeigen Sie, dass $\alpha < 0 < \beta$ existieren mit $(\alpha, \beta) \subset A_{x,r}$.

ii) Es seien $x \in U$, $r \in X \setminus \{0\}$, (α, β) wie in (i) sowie $f_{x,r} : (\alpha, \beta) \to E$, $f_{x,r}(t) = f(x + tr)$. Zeigen Sie, dass f genau dann in x in Richtung r differenzierbar ist, wenn $f_{x,r}$ in 0 differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall $f'_{x,r}(0) = df(x)(r)$ gilt.

iii) Ist f richtungsdifferenzierbar, $x \in U$, $r \in X \setminus \{0\}$ und $f_{x,r}$ wie in (ii), so zeige man, dass $f_{x,r}$ differenzierbar ist und $f'_{x,r}(t) = df(x + tr)(r)$ gilt.

Aufgabe 5:
Verwenden Sie, dass $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ für

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{1-t^2}) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

um zu zeigen, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \varphi(\frac{x_2}{x_1^2}) & \text{für } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1 = 0. \end{cases}$$

richtungsdifferenzierbar ist. Berechnen Sie weiter, $df(0)(1,0)$, $df(0)(0,1)$ und $df(0)(1,1)$ und zeigen Sie damit, dass $df(0)$ nicht linear ist.