L. Frerick
M. Thelen

Sommersemester 16

Einführung in die Funktionentheorie
Blatt 3

Abgabe am 9.5. vor der Übung

Aufgabe 6:

Für die Banachräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ und $F : X \to E$ berechne man $dF(x)(r)$ und $d^2F(x)(r,s)$ mit

i) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $F(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - e^{-2x_2} + 1$,

ii) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $F(x) = x^T A x + b^T x + 1$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,

iii) $(X, \|\cdot\|_X) = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $F(f) = \int_0^1 f^2(s)ds$.

Aufgabe 7:

Untersuchen Sie $f : U \to \mathbb{C}$ auf Holomorphie und geben Sie $df(z)(w)$ an.

i) $U = \mathbb{C}^n$, $f(z) = \sum_{\nu=1}^n |z_\nu|^2$,

ii) $U = \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$,

iii) $U = \mathbb{C}^3$, $f(z) = z_2 e^{z_1} + z_3^2 - 3z_1$.

Aufgabe 8:

i) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $f + g$, fg und λf $(\lambda \in \mathbb{C})$ holomorph in U sind. Hat g keine Nullstellen, so zeige man weiter, dass f/g ebenfalls holomorph ist.

ii) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es seien $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist in U, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \frac{\partial v}{\partial y_\nu} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y_\nu} = -\frac{\partial v}{\partial x_\nu} \text{ in } U \text{ für alle } 1 \leq \nu \leq n,$$

wobei $z = x + iy$ für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$.
(Dies sind die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.)